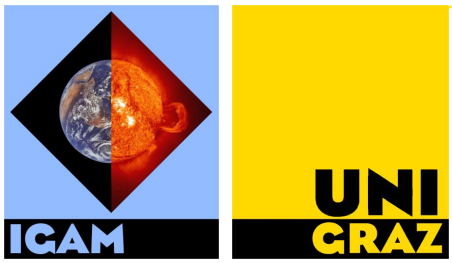
Institutsbereich Geophysik, Astrophysik und Meteorologie
Institut für Physik
Karl - Franzens - Universität Graz
Universitätsplatz 5, A-8010 Graz, Austria
http://www.uni-graz.at/igam

Wissenschaftlicher Bericht No. 18

Langwellenstrahlungstransfer in der Atmosphäre und seine Sensitivität zu Änderungen der Wasserdampfkonzentration

by
Michael Pock

Februar 2004



Institute for Geophysics, Astrophysics, and Meteorology

Michael H. Pock

Langwellenstrahlungstransfer in der Atmosphäre und seine Sensitivität zu Änderungen der Wasserdampfkonzentration

Diplomarbeit[1]

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Magisters der Naturwissenschaften
an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Karl-Franzens-Universität Graz

Betreuer:
Univ.-Prof. Mag. Dr. Gottfried Kirchengast
Institut für Geophysik, Astrophysik und Meteorologie

Februar 2004

[1] Für diesen Bericht wurden an der originalen Diplomarbeit noch einige leichte Verbesserungen und Erweiterungen vorgenommen.

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei meinem Betreuer Univ.-Prof. Mag. Dr. Gottfried Kirchengast für die Unterstützung beim Verfassen dieser Diplomarbeit bedanken. Durch die von Prof. Kirchengast im Wintersemester 2000 gehaltene Vorlesung "Physik der hohen Atmosphäre III (Strahlungs- und Energiehaushalt der Atmosphäre)" wurde ich grundsätzlich dazu motiviert, mich mit dem Thema Strahlungstransfer auseinanderzusetzen.

Mein Dank gebührt weiters Dr. Luis Kornblueh vom Max-Planck-Institut für Meteorologie Hamburg, von dem ich unter anderem den RRTM-Code erhielt und der mir bei meinen ersten Schritten mit dieser Software hilfreich zur Seite stand.

Schließlich danke ich auch meiner Familie, namentlich meinen Eltern für ihre moralische und finanzielle Unterstützung während meiner Studienzeit und meinem Bruder für seine nützlichen Ratschläge im EDV-Bereich.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Die Atmosphäre **3**
1.1 Prinzipielle Eigenschaften der Atmosphäre 3
1.2 Grundlegende Faktoren 5
1.3 Die Struktur der Atmosphäre 7
1.3.1 Zusammensetzung 8
1.3.2 Thermische Struktur 13

2 Langwellenstrahlungstransfer **17**
2.1 Der Energiehaushalt der Atmosphäre 17
2.1.1 Das mittlere globale Energiebudget 17
2.1.2 Die Energiegleichung 22
2.2 Grundlagen des LW-Strahlungstransfers 25
2.2.1 Die Grundgleichung des Strahlungstransfers 26
2.2.2 Das Planck'sche Strahlungsgesetz 28
2.2.3 LW-Strahlungstransfer in einer plan-parallelen Atmosphäre 32
2.2.4 Radianz 33
2.2.5 Strahlungsflussdichte 37
2.2.6 Radiative Temperaturänderungsrate 41
2.3 Die Methode der korrelierten *k*-Verteilung 44
2.3.1 Linienabsorption 44
2.3.2 Die Methode der *k*-Verteilung 51
2.3.3 Anwendung auf eine inhomogene Atmosphärenschicht . . 54
2.3.4 Überlappen von Absorptionslinien 60

3 Wasserdampf und Langwellenstrahlung **65**
3.1 Atmosphärischer Wasserdampf 65
3.2 Das "Rapid Radiative Transfer Model" (RRTM) 71
3.3 H_2O-Sensitivität des LW-Strahlungstransfers 77

Zusammenfassung **93**

A Physikalische Konstanten **97**

B Konzentrationsmaße am Beispiel von H_2O **99**

C Ableitung der Energiegleichung **101**

D Ableitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes **103**

E Lösung der Schwarzschild-Gleichung **105**

Einleitung

Meine Diplomarbeit stellt einen Versuch dar, die Verknüpfung zwischen zwei grundlegenden Faktoren der Atmosphärenphysik, nämlich dem Transfer von Langwellenstrahlung durch die Atmosphäre und der Existenz von atmosphärischem Wasserdampf, zu beleuchten. Denkt man daran, dass der Energieaustausch des Systems Erde-Atmosphäre mit dem interplanetaren Raum praktisch zur Gänze über Strahlungsprozesse erfolgt, wird zweifelsohne klar, dass Langwellenstrahlungstransfer als Teil des atmosphärischen Strahlungshaushalts von entscheidender Bedeutung für den Energiehaushalt der Atmosphäre ist. Dementsprechend groß ist folglich der Einfluss, den Langwellenstrahlungstransfer sowohl auf die Entwicklung des Wettergeschehens als auch auf die Ausbildung des Erdklimas ausübt.

Der in der Atmosphäre vorhandene Wasserdampf spielt gleichfalls eine essenzielle Rolle im atmosphärischen Energiehaushalt. Zum einen tut er dies direkt, indem er im Zuge seiner Erzeugung durch Verdunstungsprozesse Energie speichert, welche im Rahmen des lokalen Wasserkreislaufs in die Atmosphäre transportiert und schließlich in Form von Wärme an die Umgebungsluft abgegeben wird, zum anderen aber auch indirekt via Strahlungstransfer, was auf der hohen Strahlungsaktivität beruht, die ihm sowohl im Langwellen- als auch im Kurzwellenstrahlungsbereich eigen ist. Speziell der Einfluss des atmosphärischen Wasserdampfgehalts auf den Langwellenstrahlungstransfer stellt in der weiteren Folge den Zusammenhang zu einem nicht nur in theoretischer, sondern auch in praktischer Hinsicht zentralen Phänomen der Atmosphärenphysik her, nämlich dem Treibhauseffekt, welcher in grundlegender Weise für die Ausprägung des Erdklimas verantwortlich zeichnet.

Der nachstehende Text gliedert sich in drei Kapitel. Kapitel 1 liefert einen konzisen Überblick über fundamentale Eigenschaften der terrestrischen Atmosphäre und hat somit zum Ziel, den Kontext, in dem das eigentliche Thema meiner Diplomarbeit zu sehen ist, greifbar zu machen.

Kapitel 2 beschäftigt sich zunächst mit dem mittleren globalen Energiebudget und der Energiegleichung. Im Zuge dessen soll sowohl qualitativ als auch quantitativ die prinzipielle Bedeutung des Langwellenstrahlungstransfers für den Ener-

giehaushalt der Atmosphäre aufgezeigt werden. Ausgehend vom Lambert'schen Gesetz, werden in der weiteren Folge sukzessive die quantitativen Grundlagen des Langwellenstrahlungstransfers für den Fall einer plan-parallelen Atmosphäre erarbeitet, das heißt mathematische Ausdrücke für die Grundgrößen des Langwellenstrahlungstransfers wie Radianz, Strahlungsflussdichte und radiative Temperaturänderungsrate abgeleitet. Die letzte Sektion von Kapitel 2 hat schließlich die praktische Berechnung dieser Grundgrößen zum Inhalt. Dabei wird am Beispiel der Methode der korrelierten *k*-Verteilung (CKD-Methode) demonstriert, wie unter Aufrechterhaltung einer ziemlich hohen Genauigkeit eine enorme Verringerung des Rechenaufwandes erzielt werden kann. In welchem Ausmaß Letzteres gelingt, entscheidet über den Erfolg, mit dem Langwellenstrahlungstransferkalkulationen in Wetter- oder Klimamodellen implementiert werden können.

Kapitel 3 beginnt mit einer summarischen Beschreibung der allgemeinen Eigenschaften des atmosphärischen Wasserdampfs. Danach folgt eine kurze Diskussion des auf der Methode der korrelierten *k*-Verteilung basierenden Programms RRTM ("Rapid Radiative Transfer Model"), welches für einen gegebenen Atmosphärenzustand die vertikalen Profile einiger Grundgrößen des Langwellenstrahlungstransfers berechnet. Den in der abschließenden Sektion behandelten Schwerpunkt von Kapitel 3 bildet schließlich die Präsentation der Ergebnisse einer Studie, die ich anhand von RRTM hinsichtlich der Sensitivität des Langwellenstrahlungstransfers zu Änderungen der Wasserdampfkonzentration durchgeführt habe. Dabei wird am Beispiel vierer unterschiedlicher Standardatmosphären gezeigt, wie sich ein Nullsetzen, eine 20%-ige Verringerung sowie eine 20%-ige Erhöhung des atmosphärischen Wasserdampfgehalts auf die Höhenprofile der von RRTM kalkulierten Grundgrößen des Langwellenstrahlungstransfers auswirken.

Kapitel 1

Die Atmosphäre

1.1 Prinzipielle Eigenschaften der Atmosphäre

Die terrestrische Atmosphäre –in der weiteren Folge durchwegs einfach als Atmosphäre bezeichnet– ist die gasförmige Hülle, welche die Erde umgibt. Die Atmosphäre beeinflusst, ähnlich wie die Atmosphären anderer Planeten unseres Sonnensystems, in entscheidender Weise die Energietransfers von der Sonne zur Erdoberfläche wie auch diejenigen zwischen räumlich voneinander getrennten Regionen auf dem Globus. Da diese Energietransfers maßgeblich für die Ausprägung des Erdklimas verantwortlich sind, ist die Atmosphäre der zentrale Bestandteil des terrestrischen Klimasystems (siehe zum Beispiel [10]). Was die Erde in diesem Zusammenhang von allen anderen Planeten unseres Sonnensystems unterscheidet, ist die –über entsprechende physikalische und chemische Prozesse– bewirkte enge Anbindung der Atmosphäre an die Ozeane und die feste Erde. Diese Tatsache stellt einen Kernpunkt im Hinblick auf die Entwicklung von Leben auf unserem Planeten dar. Abbildung 1.1 liefert eine schematische Darstellung des terrestrischen Klimasystems und seiner Komponenten.

Vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet, weist die Atmosphäre die Eigenschaften eines thermo-hydrodynamischen Systems auf. Ein solches System kann durch seine individuelle Zusammensetzung sowie durch seinen thermodynamischen und mechanischen Zustand charakterisiert werden. Der thermodynamische Zustand der Atmosphäre auf der einen Seite wird durch thermodynamische Variable wie Druck, Temperatur und Dichte spezifiziert. Die Verknüpfung der thermodynamischen Variablen untereinander erfolgt dabei über eine entsprechende Zustandsgleichung. Der mechanische Zustand der Atmosphäre auf der anderen Seite resultiert aus den Eigenschaften von Windfeldern, deren Evolution in Raum und Zeit gemäß den Gesetzen der Kontinuumsmechanik erfolgt. Um zu einer wirklich vollständigen Beschreibung des Atmosphärenzustandes zu gelan-

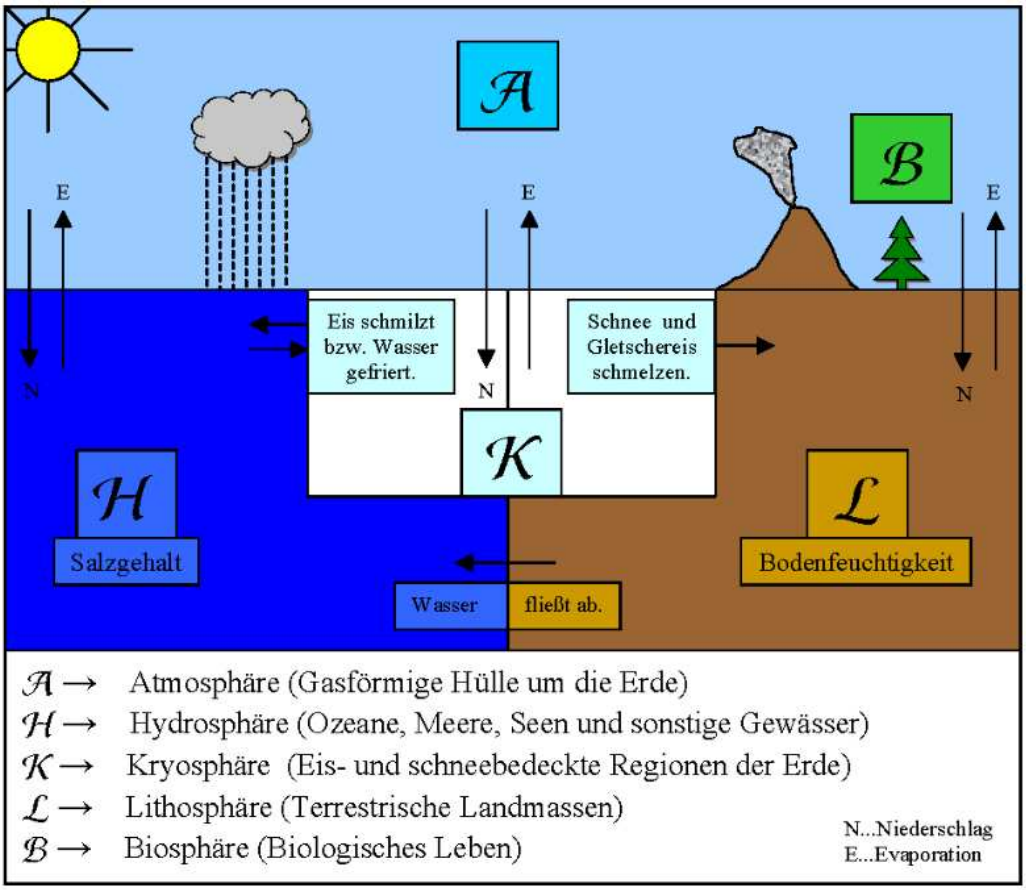


Abbildung 1.1: Das terrestrische Klimasystem (übernommen aus [10]).

gen, müssen schließlich ob ihrer zentralen Bedeutung für das Klimasystem noch zusätzliche Variable einbezogen werden. Zu diesen gehören etwa solche, welche im Rahmen von Wolkenbildung, Niederschlagsprozessen oder diabatischer Erwärmung definiert werden.

Wie bereits angedeutet, kann die Atmosphäre nicht einfach durch Beschränkung auf die atmosphäreninternen thermo-hydrodynamischen Prozesse separat betrachtet werden. Denn sie verkörpert, wie leicht einzusehen ist, kein isoliertes, sondern ein offenes System,[1] welches sich in fortwährender Wechselwirkung mit seiner Umgebung befindet. Dieser Sachverhalt äußert sich darin, dass zwischen der Atmosphäre und den benachbarten Systemen (i. e. den übrigen Komponenten

[1] Neben isolierten Systemen, deren Entwicklung völlig unabhängig von der Umgebung erfolgt, und offenen Systemen, die in vielerlei Hinsicht mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung treten, definiert man auch noch so genannte geschlossene Systeme, deren Grenzen lediglich in Bezug auf Massenaustausch mit der Umgebung restriktiv sind (siehe z .B. [10]).

des Klimasystems beziehungsweise dem interplanetaren Raum) ständig Masse, Energie und Impuls ausgetauscht und damit Flüsse dieser Systemeigenschaften über die Grenzen der Atmosphäre hinweg realisiert werden. Im Allgemeinen ist der "offene" Charakter der Atmosphäre verständlicherweise von fundamentaler Bedeutung für die Evolution des Atmosphärenzustandes in Raum und Zeit.

1.2 Grundlegende Faktoren

Von allen Faktoren, welche für die Eigenschaften der Atmosphäre verantwortlich zeichnen, ist die Gravitationswirkung der Erde ohne Zweifel der bedeutendste. Auch wenn die Atmosphäre rein formal keine äußere Berandung besitzt, da die Dichte des Atmosphärengases, mathematisch betrachtet, erst in unendlicher Entfernung von der Erdoberfläche verschwindet, ist es das terrestrische Gravitationsfeld, welches für die dauerhafte Bindung der Atmosphäre an den Erdkörper sorgt. Der Stärke der terrestrischen Gravitationsanziehung entsprechend, sind 99% der gesamten atmosphärischen Masse auf den Bereich unterhalb einer Höhe von 30 km über dem Erdboden konzentriert. Die vertikale Ausdehnung der Atmosphäre ist somit –vorausgesetzt, es wurde eine physikalisch sinnvolle Definition des Begriffs "Atmosphäre" gewählt– auf jeden Fall wesentlich kleiner als ihre horizontale Erstreckung, die etwa anhand der Distanz zwischen geographischem Nordpol und geographischem Südpol auf rund 20 000 km abgeschätzt werden kann.

Die Erdgravitation hat natürlich nicht nur eine rein existenzielle Bedeutung für die Atmosphäre. Indem sie dafür verantwortlich ist, dass die atmosphärische Masse einer im Grunde vertikalen Schichtung unterliegt, ist sie auch als der kritische Faktor hinsichtlich der Ausbildung der Struktur der Atmosphäre aufzufassen. Die vertikale Schichtung der atmosphärischen Masse bringt nun ihrerseits mit sich, dass jede atmosphärische Zirkulation, deren räumliche Erstreckung einige zehn Kilometer überschreitet, als quasi-horizontale Bewegung angesehen werden kann, i. e. als Bewegung, bei der die vertikalen Verrückungen von Gaspartikeln stets wesentlich kleiner als deren horizontale Verrückungen sind. Von vergleichbarer Größe sind vertikale und horizontale Verrückungen nur im Falle kleinräumiger Zirkulationen, deren horizontaler Scale nicht über die Größenordnung des vertikalen Scales der involvierten Massenverteilung hinausgeht. Letzten Endes rühren von der Erdgravitation also auch die nicht unwesentlichen kinematischen Zwänge her, denen die Strömungsbewegungen im Atmosphärengas ausgesetzt sind.

Einen ähnlich fundamentalen Einfluss wie die terrestrische Gravitationsanziehung übt die Eigenrotation der Erde auf die Eigenschaften der Atmosphäre aus. Auf Grund der Tatsache, dass die Atmosphäre der Rotationsbewegung des Erdkörpers in strenger Korotation folgt, i. e. die Gesamtheit der Gaspartikel eine beschleunigte Grundbewegung im Takte der Erdrotation durchführt, ist das At-

mosphärengas vom Standpunkt eines Beobachters im Ruhesystem der Erde[2] der Wirkung von Trägheitskräften unterworfen. Zu diesen gehört einerseits die Zentrifugalkraft, welche die eigentliche Gravitationskraft der Erde zu einer effektiven Gravitationskraft, der Schwerkraft nämlich, abschwächt, und andererseits die Corioliskraft. Die Corioliskraft wirkt sich im Besonderen auf die Eigenschaften von großräumigen Zirkulationen aus. Darüber hinaus liegt ihre Bedeutung vor allem darin, dass sie ihrer ablenkenden Natur zufolge jene meridionalen Strömungsbewegungen hemmt, durch die der erfoderliche Austausch von Wärme und atmosphärischen Bestandteilen zwischen den äquatorialen und den polaren Breiten erfolgt. In derselben Weise, wie die terrestrische Gravitationsanziehung auf die Herstellung einer vertikalen Schichtung abzielt, unterstützt also die Erdrotation via Corioliskraft die Aufrechterhaltung einer gewissen zonalen Schichtung.

Ein weiterer maßgeblich das Verhalten der Atmosphäre prägender Faktor ist die Kompressibilität des Atmosphärengases. Diese hat zur Folge, dass sich im Laufe der Zeit zwar nicht die Masse einer Gaspartikel, sehr wohl aber die Dichte innerhalb einer Gaspartikel ändern kann.[3] Enthält eine Gaspartikel Atmosphärenbestandteile, die in chemische Umsetzungen involviert sind, werden darüber hinaus einzelne Teilmassen der Gaspartikel einer zeitlichen Variabilität unterliegen. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn in einer stratosphärischen Gaspartikel nach Sonnenaufgang die Menge an molekularem Sauerstoff im Zuge von Photodissoziation zugunsten von Ozon abnimmt. Passiert eine aus feuchter Luft bestehende Gaspartikel ein Wolkensystem, wird sich des Weiteren die in der Gaspartikel enthaltene Wasserdampfmenge verringern, indem im Verlauf von Phasenumwandlungen flüssiges Wasser oder Eis entsteht.

Von grundlegender Relevanz für die Eigenschaften der Atmosphäre ist ferner auch die Tatsache, dass Gaspartikel fortwährend an Prozessen teilhaben, in deren Rahmen Energie mit der Umgebung ausgetauscht beziehungsweise Energie von einer Form in eine andere umgewandelt wird. Wenn sich zum Beispiel eine Gaspartikel ausdehnt, tauscht sie im Zuge der entsprechenden Arbeitsleistung mechanische Energie mit der Umgebung aus. Die Absorption von Strahlungsenergie oder die Aufnahme von fühlbarer Wärme –etwa durch Kontakt mit der Erdoberfläche– bedeutet hingegen einen thermischen Energieaustausch zwischen einer Gaspartikel und ihrer Umgebung. Ist eine Gaspartikel schließlich durch Anreicherung von bodennaher Luft mit Wasserdampf entstanden, erhöht sich ihre innere Energie, wenn im Zuge der Kondensation von Wasserdampf latente Wärme frei wird. Dieser Vorgang zieht, sobald das kondensierte Wasser als Niederschlag zum Erdboden zurückfällt, letzten Endes wiederum den Austausch von Wärme

[2] Die Beobachtung der atmosphärischen Dynamik erfolgt verständlicherweise für gewöhnlich von einem mit der Erde mitrotierenden Koordinatensystem aus.

[3] Unter einer Gaspartikel versteht man ein materielles Volumen im Atmosphärengas, i. e. ein Volumen, das stets dasselbe Ensemble von elementaren Teilchen umfasst.

zwischen der Gaspartikel und ihrer Umgebung nach sich.

Schließlich bleibt noch zu betonen, dass alle Prozesse, die im Rahmen dieser Sektion kurz angesprochen wurden, im Allgemeinen niemals unabhängig voneinander ablaufen. Vielmehr verbinden sie sich zu einem komplexen Gebilde aus Strahlung, Chemie und Dynamik. Wechselwirkungen zwischen manchen Prozessen können ohne weiteres von derselben Bedeutung sein, wie es die betreffenden Prozesse selbst sind. Der Transfer von solarer und terrestrischer Strahlung durch die Atmosphäre beispielsweise ist maßgeblich an der Ausbildung der thermischen Struktur der Atmosphäre beteiligt. Diese wiederum regelt die atmosphärische Zirkulation, die ihrerseits sowohl die Verteilung von strahlungsaktiven Atmosphärenbestandteilen (wie zum Beispiel Wasserdampf, Ozon und Wolken) als auch die thermische Struktur der Atmosphäre beeinflusst. Angesichts dessen wird evident, dass umfassendes Verständnis hinsichtlich eines individuellen in der Atmosphäre ablaufenden Prozesses nur dann erlangt werden kann, wenn man auch über dessen Verknüpfungen mit anderen Prozessen Bescheid weiß.

1.3 Die Struktur der Atmosphäre

Die Atmosphäre lässt sich unterschiedlichen Gesichtspunkten zufolge in eine Anzahl von Schichten unterteilen, welche als Stockwerke oder –in Anlehnung an die näherungsweise kugelsymmetrische Geometrie der Atmosphäre– auch als Sphären bezeichnet werden. Im einfachsten Fall werden folgende Kriterien zur Definition solcher Sphären herangezogen:

1. Der vertikale Temperaturverlauf und gaskinetische Eigenschaften der Atmosphäre
2. Die Zusammensetzung der Atmosphäre hinsichtlich ihrer Hauptbestandteile
3. Die Existenz freier Elektronen

Gemäß Kriterium (1) teilt man die Atmosphäre –von innen nach außen– in Troposphäre, Stratosphäre, Mesosphäre und Thermosphäre ein. Die Separation benachbarter Sphären erfolgt anhand von Trennflächen, die entsprechend als Tropopause, Stratopause, Mesopause und Exobase[4] bezeichnet werden. Wichtig ist an dieser Stelle zu betonen, dass diese Trennflächen im Endeffekt nicht als mathematische Trennflächen, sondern vielmehr als Übergangsbereiche, welche selbst eine mehr oder weniger große vertikale Erstreckung aufweisen, aufzufassen sind. Die Unterteilung der Atmosphäre nach Kriterium (2) bringt die Unterscheidung zwischen der Homosphäre und der Heterosphäre mit sich. Der Übergangsbereich

[4]Gleichbedeutend mit der Bezeichnung “Exobase” ist die Bezeichnung “Thermopause”.

zwischen diesen beiden Sphären wird Turbopause[5] genannt. Die äußere Berandung der Heterosphäre ist wie diejenige der Thermosphäre durch die Exobase gegeben. Kriterium (3) schließlich führt zur Definition der aus D-Region, E-Region, F-Region, Topside-Region und Plasmasphäre[6] zusammengesetzten Ionosphäre. Genaueres zur Struktur der Ionosphäre siehe zum Beispiel [4].

Eher praktische als physikalische Beweggründe haben ferner die Unterteilung der Atmosphäre in eine untere, mittlere und hohe Atmosphäre mit sich gebracht. Zur unteren Atmosphäre zählt man meist den Atmosphärenbereich, der anhand von Wetterballonen zugänglich ist, i. e. den Atmosphärenbereich bis zu einer Höhe von etwa 30 km. Daran anschließend, erstreckt sich die mittlere Atmosphäre bis rund 90 km Höhe, was der maximalen Reichweite diverser Methoden zur Fernerkundung der Atmosphäre vom Erdboden aus[7] entspricht. Mit der hohen Atmosphäre verbindet man letztlich den gesamten darüber liegenden Atmosphärenbereich.

1.3.1 Zusammensetzung

Die Atmosphäre besteht aus einer Gasmischung, deren Druck und Dichte monoton mit der Höhe abnehmen. Wenngleich die Zusammensetzung der Atmosphäre sehr komplex ist und zudem eine ausgeprägte Orts- und Zeitabhängigkeit aufweist, machen allein molekularer Stickstoff und molekularer Sauerstoff stets rund 99% des gesamten atmosphärischen Volumens aus. Grundsätzlich unterscheidet man bei den Atmosphärenbestandteilen zwischen Haupt- und Nebenbestandteilen.[8]

In der Homosphäre umfassen die Hauptbestandteile molekularen Stickstoff, molekularen Sauerstoff und Argon. Zusammen mit Kohlendioxid werden diese drei Teilgase als “trockene” Luft bezeichnet. Wasserdampfkonzentrationen können die Argonkonzentration in Bodennähe um einiges überschreiten. Nichtsdestoweniger wird Wasserdampf in der Homosphäre wegen der ausgeprägten räumlichen und zeitlichen Variabilität seiner Verteilung und im Besonderen wegen der schnellen Abnahme seiner Konzentration mit der Höhe als Nebenbestandteil aufgefasst. Als Verteilungsprozess dominiert in der Homosphäre turbulente Durchmischung, auch bekannt unter der Bezeichnung Eddy-Diffusion. Geht man von einer mittleren globalen, im Gleichgewicht befindlichen Atmosphäre wie der US-Standardatmosphäre 1976 aus, bedeutet dies, dass den vertikalen Dichteprofilen all jener Teilgase, die keinen Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen unterliegen,

[5] Neben der Bezeichnung “Turbopause” ist auch die Bezeichnung “Homopause” geläufig.

[6] Die Plasmasphäre wird auch als Protonosphäre bezeichnet.

[7] Als Beispiel sei hier das LIDAR-Verfahren angegeben (siehe z. B. [7]).

[8] Zu den Nebenbestandteilen zählt man auch alle Teilchenpopulationen in flüssiger und fester Phase (Wolkenpartikel, Aerosolpartikel), die in das Atmosphärengas eingebettet sind.

i. e. den vertikalen Dichteprofilen der Bestandteile der trockenen Luft, derselbe Scale zugrunde liegt. Diesen bezeichnet man als Dichteskalenhöhe. Die Dichteskalenhöhe steht in enger Beziehung zu der Druckskalenhöhe, die indirekt proportional zum mittleren Molekulargewicht der trockenen Luft ist und die vertikale Druckabnahme in der Homosphäre determiniert. Tabelle 1.1 gibt Einblick in die Zusammensetzung der Homosphäre. Mit dem Konzentrationsmaß "Mischungsverhältnis" ist das Volumenmischungsverhältnis gemeint, i. e. der Volumenanteil eines Atmosphärenbestandteils an einer Gaspartikel, bezogen auf den Volumenanteil der trockenen Luft.[9] Für die drei Hauptbestandteile und Kohlendioxid ist das Volumenmischungsverhältnis natürlich konstant, da der Scale des vertikalen Dichteprofils der trockenen Luft in der Homosphäre per definitionem ebenfalls gleich der Dichteskalenhöhe ist. Abbildung 1.2 präsentiert die vertikalen Profile von Druck und Massendichte in der Homosphäre am Beispiel der US-Standardatmosphäre 1976.[10]

Abbildung 1.3 zeigt in weiterer Folge den vertikalen Verlauf des mittleren Molekulargewichts in der Atmosphäre bis zu einer Höhe von 1000 km. Wie ersichtlich wird, nimmt das zunächst annähernd konstante mittlere Molekulargewicht der Luft in der oberen Homosphäre leicht mit der Höhe ab. Grund hierfür ist die ab der Mesopause rasch größer werdende Bedeutung von atomarem Sauerstoff, der primär im Zuge der Photodissoziation von molekularem Sauerstoff entsteht. Außerdem zeichnet sich die obere Homosphäre dadurch aus, dass die Effizienz von molekularer Diffusion als Verteilungsprozess gegnüber der Effizienz von turbulenter Durchmischung immer mehr zunimmt. Die Turbopause, die definitionsgemäß die obere Berandung der Homosphäre verkörpert, legt man dann konsequenterweise dort fest, wo die charakteristische Zeit für molekulare Diffusion gleich derjenigen für turbulente Durchmischung wird (siehe zum Beispiel [12]). Die Höhe der Turbopause kann, wie aus Abbildung 1.3 hervorgeht, typischerweise mit 100 km angegeben werden. Die drüber liegende Heterosphäre unterscheidet sich von der Homosphäre grundlegend. Auf Grund der Dominanz von molekularer Diffusion als Verteilungsprozess liegt auch den vertikalen Dichteprofilen all jener Neutralgasbestandteile, die keinen Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen unterworfen sind, jeweils ein eigener Scale zugrunde. Die individuelle Dichteskalenhöhe, durch die dieser Scale für einen bestimmten heterosphärischen Neutralgasbestandteil gegeben ist, steht wiederum in enger Beziehung mit der entsprechenden Partialdruckskalenhöhe. Da die Partialdruckskalenhöhe eines Neutralgasbestandteils indirekt proportional zu dessen Molekulargewicht ist, ver-

[9] Ein anderes gebräuchliches Konzentrationsmaß ist das Massenmischungsverhältnis, i. e. der Massenanteil eines Atmosphärenbestandteils an einer Gaspartikel, bezogen auf den Massenanteil der trockenen Luft (siehe auch Anhang B).

[10] Quelle: Programm ussa1976.pas von Steven S. Pietrobon (http://www.sworld.com.au/steven/space/atmosphere)

Tabelle 1.1: Zusammensetzung der Homosphäre (aus [16] übernommen)

Bestandteil	Mischungs-verhältnis[a]	Höhenprofil des Mischungsverhältnisses	Zugrunde liegende Prozesse
N_2	78.08%	Homogen	Eddy-Diffusion
O_2	20.95%	Homogen	Eddy-Diffusion
H_2O[a]	$\leq 3\%$	Starke Abnahme in der Troposphäre; Zunahme in der Stratosphäre; hochgradig variabel	Verdunstung, Kondensation und Sublimation; Transport; Erzeugung im Zuge der Oxidation von CH_4
A	0.93%	Homogen	Eddy-Diffusion
CO_2[b]	345 ppmv	Homogen	Eddy-Diffusion; Erzeugung durch Boden- und anthropogene Prozesse
O_3[b]	10 ppmv[c]	Starke Zunahme in der Stratosphäre; hochgradig variabel	Photochemische Erzeugung in der Stratosphäre; Vernichtung am Erdboden; Transport
CH_4[b]	1.6 ppmv	Homogen in der Troposphäre; Abnahme in der mittleren Atmosphäre	Erzeugung durch Bodenprozesse; Vernichtung im Zuge von Oxidation
N_2O[b]	350 ppbv	Homogen in der Troposphäre; Abnahme in der mittleren Atmosphäre	Erzeugung durch Boden- und anthropogene Prozesse; Dissoziation in der mittleren Atmosphäre; Transport
CO[b]	70 ppbv	Abnahme in der Troposphäre; Zunahme in der Stratosphäre	Erzeugung durch anthropogene Prozesse und im Zuge der Oxidation von CH_4; Transport
NO	0.1 ppbv[c]	Zunahme mit der Höhe	Erzeugung im Zuge der Dissoziation von N_2O und der katalytischen Vernichtung von O_3
CFC-11/12[b]	0.2/0.3 ppbv	Homogen in der Troposphäre; Abnahme in der Stratosphäre	Industrielle Erzeugung; Eddy-Diffusion in der Troposphäre; Photodissoziation in der Stratosphäre

[a] Repräsentativ für die Troposphäre
[b] Strahlungsaktive Gase
[c] Stratosphärische Konzentration

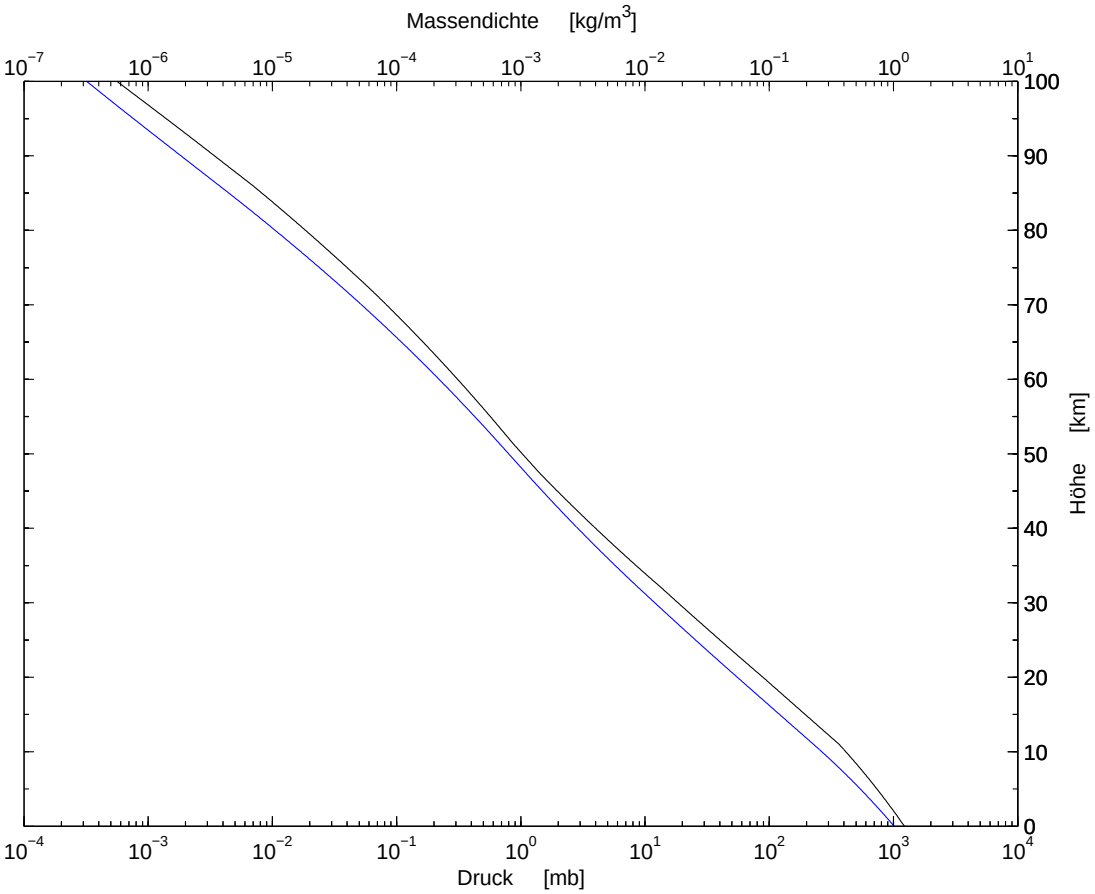


Abbildung 1.2: Vertikaler Verlauf von Druck (blau) und Massendichte (schwarz) in der Homosphäre (US-Standardatmosphäre 1976).

schiebt sich der Teilchenschwerpunkt in der Heterosphäre mit zunehmender Höhe immer mehr zu den leichten Neutralgasbestandteilen. Infolgedessen löst in einer Höhe von etwa 180 km atomarer Sauerstoff molekularen Stickstoff als Hauptbestandteil ab. Abbildung 1.4 liefert die vertikalen Konzentrationsprofile der fünf wichtigsten Neutralgasbestandteile der Atmosphäre oberhalb der Mesopause. Mit Teilchenkonzentration ist dabei das Verhältnis der Teilchenanzahldichte eines individuellen Neutralgasbestandteils zur totalen Teilchenanzahldichte gemeint.

In der über der Heterosphäre gelegenen Atmosphärenregion, der so genannten Exosphäre, kann wegen der geringen Dichte von keinem Neutralgas im eigentlichen Sinn mehr gesprochen werden. Auf Grund der großen mittleren freien Weglängen kommt es dort vor, dass leichte Neutralgasteilchen, i. e. Wasserstoffa-

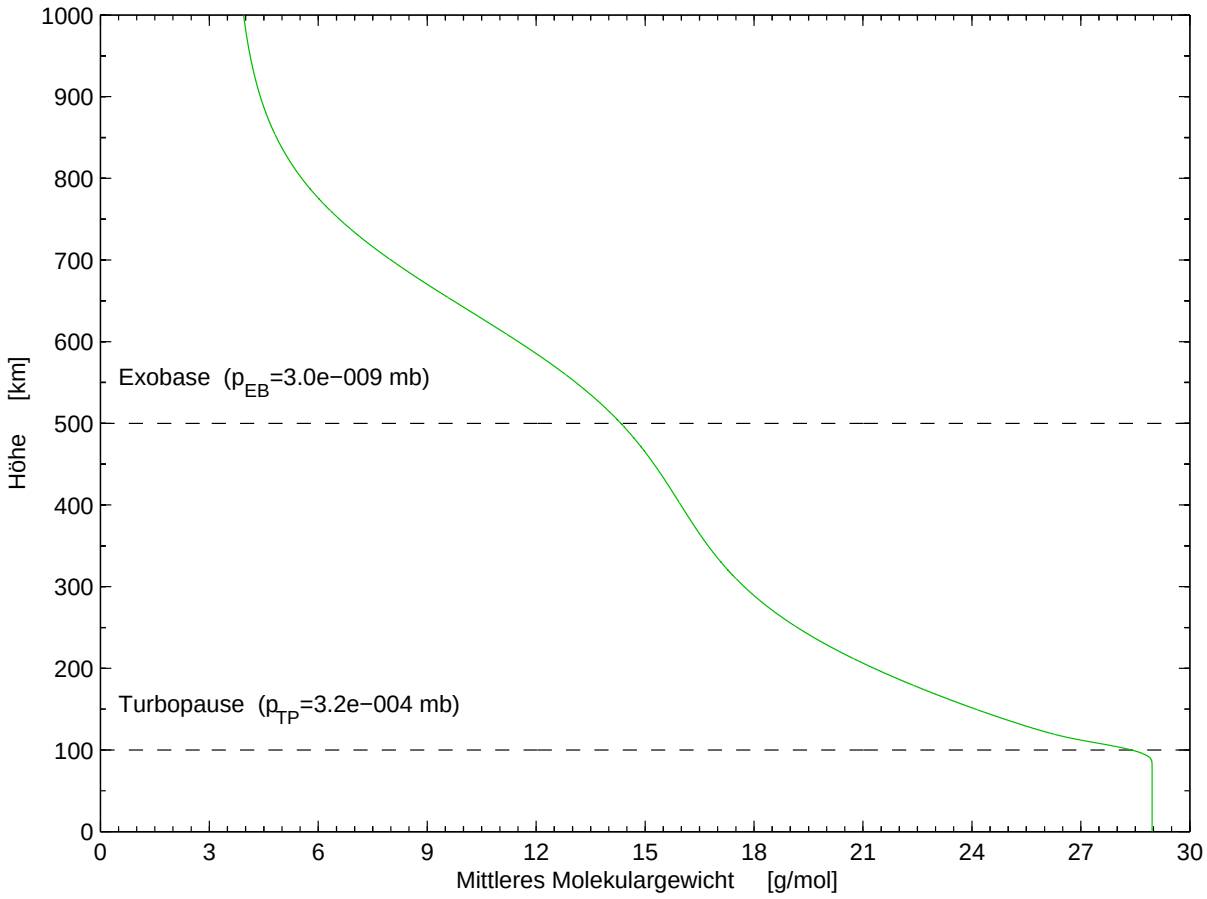


Abbildung 1.3: Vertikaler Verlauf des mittleren Molekulargewichts in der Atmosphäre (US-Standardatmosphäre 1976); *p* steht für Druck.

tome und in geringerem Ausmaß auch Heliumatome,[11] in der Exosphäre bis zur Fluchtgeschwindigkeit beschleunigt werden, was sie befähigt, das terrestrische Gravitationsfeld zu verlassen und in den interplanetaren Raum zu entfliehen. Unmittelbare Folge dieser Fluchtprozesse ist eine Störung der Maxwell-Verteilungen der entsprechenden Teilchenpopulationen. Der Übergang zwischen Heterosphäre und Exosphäre findet an der Exobase statt. Definiert werden kann die Exobase als jener geometrische Ort, oberhalb dessen ein senkrecht nach oben fliegendes Wasserstoffatom im statistischen Mittel weniger als einen einzigen Zusammenstoß mit einem anderen Teilchen erleidet (siehe zum Beispiel [12]). Als Richtwert kann für die Exobase, wie in Abbildung 1.3 angedeutet, eine Höhe von 500 km angegeben werden.

[11] He und H sind in der Exosphäre die Hauptbestandteile des Neutralgases.

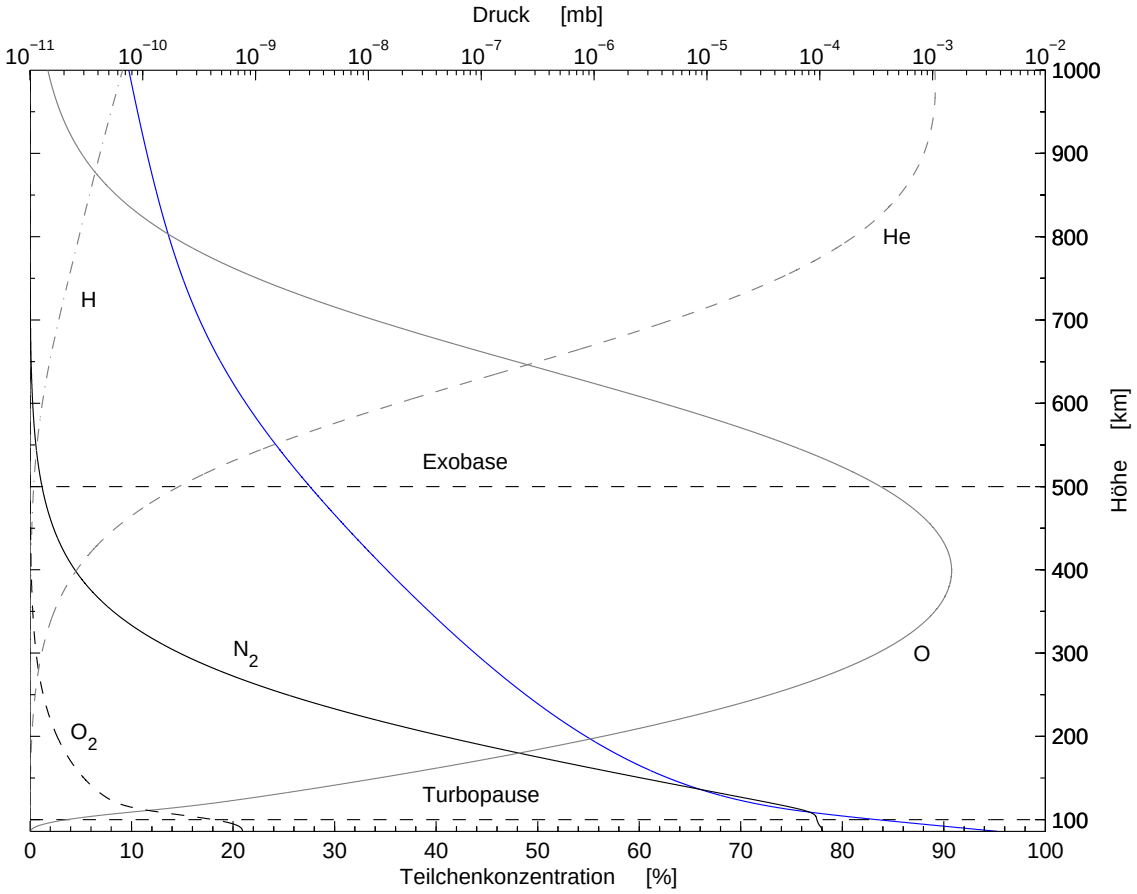


Abbildung 1.4: Vertikaler Verlauf der Teilchenkonzentrationen von N_2, O_2, O, He und H sowie vertikaler Druckverlauf (blau) oberhalb der Mesopause (US-Standardatmosphäre 1976).

1.3.2 Thermische Struktur

Ein grundlegendes Bild von der thermischen Struktur der Atmosphäre lässt sich durch Betrachtung des vertikalen Verlaufs der mittleren globalen Temperatur des Atmosphärengases ableiten. Wie aus Abbildung 1.5 am Beispiel der US-Standardatmosphäre 1976[12] ersichtlich wird, nimmt die mittlere globale Temperatur in der Troposphäre, ausgehend von einer Bodentemperatur von 288.15 K (umgerechnet 15° C), mit der Höhe im Prinzip linear ab. Der Mittelwert des damit praktisch konstanten vertikalen troposphärischen Temperaturgradienten beträgt rund -6.5 K/km. Verantwortlich für die Linearität des vertikalen Temperaturprofils in

[12]Quelle: Programm ussa1976.pas von Steven S. Pietrobon (http://www.sworld.com.au/steven/space/atmosphere)

der Troposphäre ist die konvektive Zufuhr fühlbarer Wärme von unten. Hierzu kommt es, weil der Erdboden den Großteil der dem System Erde-Atmosphäre zur Verfügung stehenden Sonnenstrahlung absorbiert und damit quasi als Heizfläche fungiert. Konvektion geht in der Troposphäre im Allgemeinen auch mit dem Transport latenter Wärme einher. Wird nun im Zuge von Wolkenbildung latente Wärme freigesetzt, bleibt der lineare Charakter des vertikalen troposphärischen Temperaturprofils zwar grundsätzlich erhalten. Die Abnahme der Temperatur mit der Höhe geht indessen je nachdem, wieviel Wasserdampf kondensiert, langsamer vonstatten als im Falle trockener Luft. Einen weiteren Einfluss auf die thermische Struktur der Troposphäre übt die Strahlungsabsorption durch Wolken mit anschließender Emission von Infrarotstrahlung nach oben und nach unten aus. Dasselbe gilt schließlich für die Absorption und Reemission von Infrarotstrahlung durch so genannte Treibhausgase, wie zum Beispiel Wasserdampf, Kohlendioxid und Ozon. In summa summarum kann die Troposphäre als jener Atmosphärenbereich aufgefasst werden, in dem im Prinzip das, was man landläufig unter dem Wettergeschehen versteht, stattfindet. Die obere Berandung der Troposphäre, die Tropopause, liegt in einer Höhe von etwa 11 km und ist durch eine ausgeprägte Änderung des vertikalen Temperaturgradienten gekennzeichnet.

In der Stratosphäre ist die Temperatur zunächst konstant und nimmt dann bis zur Stratopause, die in einer Höhe von etwa 47 km liegt, auffällig zu. Grund hierfür ist die Thermalisierung von Überschussenergie, die bei der Absorption ultravioletter Sonnenstrahlung durch das stratosphärische Ozon auftritt. Eine weitere Rolle spielt wie in der Troposphäre der mit den Treibhausgasen verknüpfte Infrarotstrahlungstransfer. Kaum Relevanz hat für die Ausbildung des vertikalen stratosphärischen Temperaturprofils konvektiver Wärmetransport. Die vertikale Temperaturabnahme in der Mesosphäre, die bis zu einem absoluten atmosphärischen Temperaturminimum an der in einer Höhe von 86 km befindlichen Mesopause erfolgt, basiert wiederum auf einem Zusammenspiel zwischen Infrarotstrahlungstransfer und Energietransport von unten zufolge vertikal propagierender Schwerewellen mit Quellen in der Troposphäre und der unteren Stratosphäre. Unmittelbar unterhalb der Mesopause wird die thermische Struktur der Mesosphäre schließlich auch noch durch Wärmezufuhr aus der darüber liegenden wärmeren Thermosphäre via Konvektion und molekulare Wärmeleitung beeinflusst.

Die Thermosphäre ist von einer monotonen Temperaturzunahme mit der Höhe geprägt. Hierzu kommt es infolge der Wärmeproduktion, mit der die Absorption von ultravioletter und extrem ultravioletter Sonnenstrahlung im Rahmen zahlreicher Dissoziations- und Ionisationsprozessen einhergeht. Der hinsichtlich der Verteilung der in der Thermosphäre erzeugten Wärme wesentliche Prozess ist molekulare Wärmeleitung. Da die charakteristische Zeit für molekulare Wärmeleitung mit der Höhe schnell abnimmt, was gleichbedeutend mit einer raschen Steigerung der Effizienz dieses Prozesses beim Ausgleichen von Temperaturunterschieden

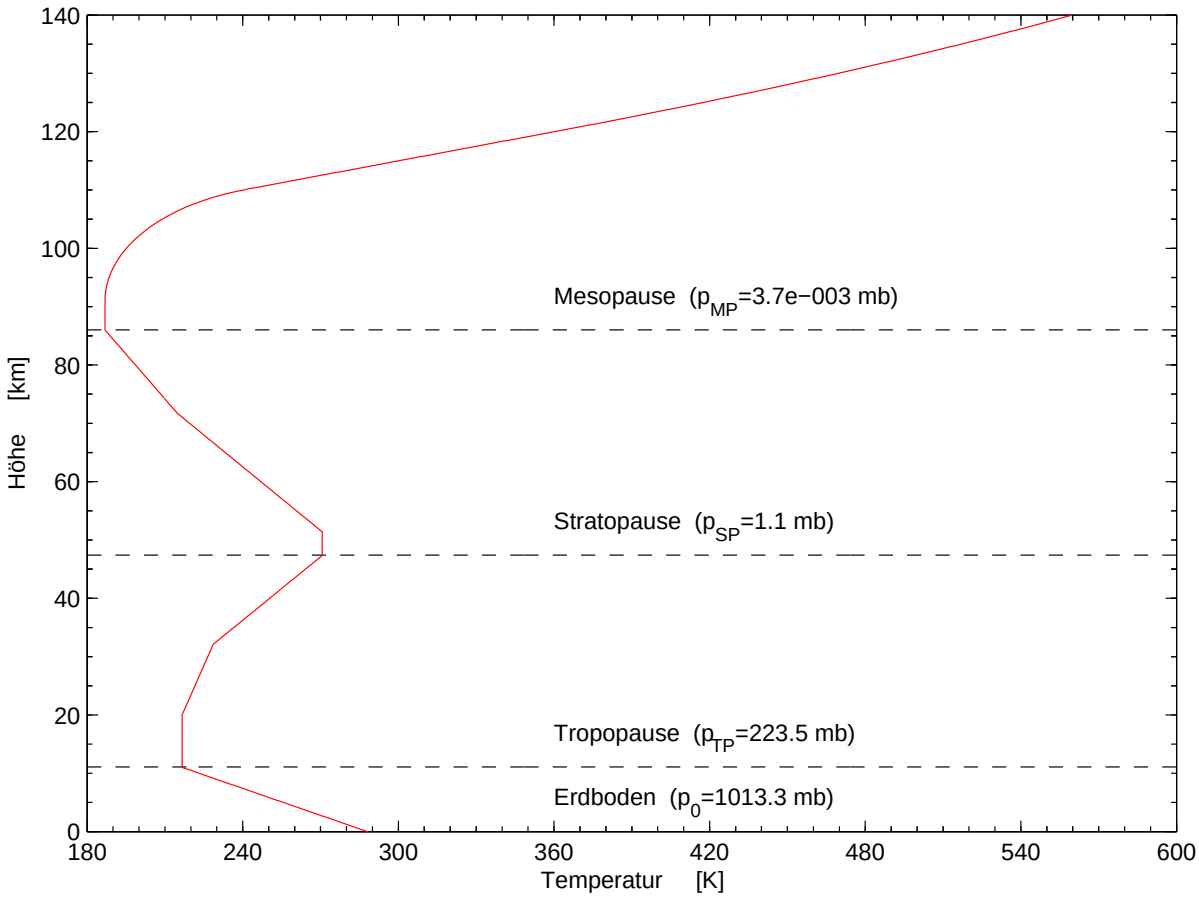


Abbildung 1.5: Vertikaler Temperaturverlauf in der Atmosphäre (US-Standardatmosphäre 1976); *p* steht für Druck.

ist, wird der vertikale Temperaturgradient in der Thermosphäre nach oben hin immer kleiner. Letzten Endes strebt die thermosphärische Temperatur einem Grenzwert, der so genannten Exosphärentemperatur, mit einem Wert von 1000 K entgegen. Infrarotstrahlungstransfer ist für die thermische Struktur der Thermosphäre nur in deren untersten Schichten, wo noch geringe Mengen an Treibhausgasen vorhanden sind, von Relevanz.

Kapitel 2

Langwellenstrahlungstransfer

2.1 Der Energiehaushalt der Atmosphäre

2.1.1 Das mittlere globale Energiebudget

Den grundlegende Antrieb für die in der Atmosphäre stattfindenden Prozesse stellt die Absorption von Sonnenstrahlung durch den Erdboden dar. Über Zeiträume, die von deutlich größerer Länge sind als der Scale, welcher der Neuverteilung der absorbierten Sonnenenergie zugrunde liegt,[1] muss sich das System Erde-Atmosphäre im thermischen Gleichgewicht befinden, und sein Nettoenergiegewinn damit verschwinden. Wäre dies nicht der Fall, würde es zu einer fortwährenden Erwärmung beziehungsweise Abkühlung des Systems kommen. Thermisches Gleichgewicht bedeutet für das System Erde-Atmosphäre, dass sich im langzeitlichen Mittel absorbierte und emittierte Energiemenge die Waage halten. Infolgedessen besteht also eine Balance zwischen der Absorption von solarer Strahlung, deren Schwerpunkt im Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts liegt, und der Emission von terrestrischer Strahlung, die sich auf den Wellenlängenbereich um 10 μm konzentriert und damit als thermische Infrarotstrahlung, i. e. als Wärmestrahlung, aufzufassen ist.[2] Da die Wellenlängenbereiche, welche von der solaren beziehungsweise der terrestrischen Strahlung umfasst werden, nur geringfügig überlappen, ist es oft zulässig, Sonnen- und Erdstrahlung getrennt voneinander zu betrachten. In diesem Sinn bezieht man sich dann auf Erstere mit der Bezeichnung “Kurzwellenstrahlung” (SW-Strahlung) und auf Letztere mit der Bezeichnung “Langwel-

[1] Die Größenordnung solcher Zeiträume liegt im Bereich eines Jahres und mehr.

[2] Neben solarer Energie absorbiert das System Erde-Atmosphäre auch noch stellare Energie und kosmische Strahlung. Darüber hinaus gibt der Erdkörper ständig Wärme ab, die auf radioaktive Zerfallsprozesse im Erdinneren zurückgeht und damit in keinerlei Verbindung mit zuvor absorbierter Energie steht. Der Effekt all dieser Prozesse ist jedoch bei den meisten Betrachtungen vernachlässigbar klein.

lenstrahlung" (LW-Strahlung). Die Grenze zwischen den Wellenlängenbereichen von Kurz- und Langwellenstrahlung befindet sich bei etwa 5 μm.

Die solare Strahlungsenergie, die einer normal zur Sichtlinie der Sonne ausgerichteten Einheitsfläche in mittlerer Entfernung zwischen Sonne und Erde pro Zeiteinheit zur Verfügung gestellt wird, bezeichnet man als Solarkonstante. Die Analyse von Satellitenmessungen der Solarkonstante führt zu einem mittleren Wert von $S_0 = 1366 \pm 3$ Wm^{-2} (siehe zum Beispiel [7]). Ausgehend von einer kugelförmigen Erde mit dem Radius R_E und einer nicht-absorbierenden Atmosphäre,[3] wird vom System Erde-Atmosphäre demnach im langzeitlichen Mittel insgesamt die Strahlungsleistung

$$A_{\mathrm{SW}} = S_0 (1 - \mathcal{A}) R_E^2 \pi \tag{2.1}$$

absorbiert. $\mathcal{A}S_0$ ist jener Anteil an der mittleren Solarkonstante, der auf Grund von Reflexion an Wolken und an der Erdoberfläche sowie zufolge von Rückstreuung durch das Atmosphärengas vom System Erde-Atmosphäre nicht genützt werden kann. Die Albedo $\mathcal{A}$ hat damit die Bedeutung des mittleren globalen Rückstrahlvermögens des Systems Erde-Atmosphäre. Als Zahlenwert kann für $\mathcal{A}$ rund 0.3 eingesetzt werden.

Die Neuverteilung der absorbierten Kurzwellenstrahlungsenergie erfolgt –eingedenk der Annahme einer nicht-absorbierenden Atmosphäre– im Zuge der Emission von Langwellenstrahlung seitens des Erdbodens. Unter der Voraussetzung, dass die terrestrische Strahlungsemission den Gesetzen der Schwarzkörperstrahlung gehorcht, emittiert das System Erde-Atmosphäre gemäß Stefan-Boltzmann-Gesetz (siehe Subsektion 2.2.2) im langzeitlichen Mittel insgesamt die Strahlungsleistung

$$E_{\mathrm{LW}} = \sigma T_e^4 \cdot 4 R_E^2 \pi, \tag{2.2}$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und T_e die mittlere äquivalente Schwarzkörpertemperatur der Erde ist. Indem durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (2.1) und (2.2) der Forderung nach thermischem Gleichgewicht Genüge getan wird, erhält man für T_e schließlich folgenden Ausdruck:

$$T_e = \left[\frac{S_0}{4\sigma} (1 - \mathcal{A}) \right]^{1/4}. \tag{2.3}$$

Einsetzen von $S_0 = 1366$ Wm^{-2} und $\mathcal{A} = 0.3$ führt zu einer mittleren äquivalenten Schwarzkörpertemperatur der Erde von $T_e \cong 255$ K (umgerechnet ungefähr -18° C). Die mittlere globale Bodentemperatur beträgt indessen (siehe Subsektion 1.3.2) etwa 288 K und ist damit um rund 33 K höher als die mittlere äquivalente Schwarzkörpertemperatur. Dies beruht auf der Tatsache, dass die

[3] Eine nicht-absorbierende Atmosphäre ist gleichzeitig auch nicht-emittierend.

Atmosphäre zwar im sichtbaren Wellenlängenbereich, in dem der Schwerpunkt der eingestrahlten Kurzwellenstrahlung liegt, kaum absorbiert, im infraroten Wellenlängenbereich um 10 μm, der den Großteil der vom Erdboden abgestrahlten Langwellenstrahlung umfasst, jedoch ein hohes Absorptionsvermögen aufweist. Verantwortlich für diese Eigenschaft der Atmosphäre sind, wie bereits in Subsektion 1.3.2 angesprochen, infrarotaktive Atmosphärenbestandteile wie Wolken- und Aerosolpartikel sowie in der unteren und mittleren Atmosphäre enthaltene Treibhausgase. Zu Letzteren zählen im Besonderen Wasserdampf, Kohlendioxid und Ozon, aber auch Methan, Lachgas, Kohlenmonoxid und verschiedene Fluorchlorkohlenwasserstoffe (FCKW's).

Die von einer bestimmten dünnen Luftschicht kraft der inhärenten Wirkung infrarotaktiver Atmosphärenbestandteile absorbierte Langwellenstrahlung wird gemäß dem Kirchhoff'schen Gesetz[4] reemittiert, und zwar –was der springende Punkt ist– zu gleichen Teilen nach oben und nach unten. Das Verhalten aller übrigen Luftschichten, in denen infrarotaktive Atmosphärenbestandteile vorhanden sind, ist vollkommen äquivalent, was zur Folge hat, dass der Atmosphäre im unteren und mittleren Bereich ein komplizierter Langwellenstrahlungstransfer innewohnt. Die Reemission von Langwellenstrahlung Richtung Erdboden führt natürlich letzten Endes dazu, dass im System Erde-Atmosphäre um einiges mehr Wärme gespeichert ist, als dies bei einer nicht-absorbierenden Atmosphäre der Fall wäre, und liefert damit die grundsätzliche Erklärung für die –auch unter der Bezeichnung "Treibhauseffekt" bekannte– beträchtliche Erhöhung der mittleren globalen Bodentemperatur gegenüber der mittleren äquivalenten Schwarzkörpertemperatur. Der anhand von (2.3) errechnete Wert für die mittlere äquivalente Schwarzkörpertemperatur von 255 K liegt konsequenterweise im Bereich von Temperaturwerten, wie sie typischerweise in einer Höhe von rund 5 km auftreten. Tatsächlich ist der Treibhauseffekt nämlich größtenteils auf die unter dieser Höhe liegende bodennahe Atmosphärenregion, in der die Masse der Wolken und des atmosphärischen Wasserdampfs enthalten sind, zurückzuführen. Bei einer einfachen qualitativen Betrachtung wie der hiesigen kann somit angenommen werden, dass die vom System Erde-Atmosphäre emittierte Langwellenstrahlung im Prinzip ab der mittleren Troposphäre endgültig, i. e. ohne weitere Konsequenz für atmosphärische Prozesse, in den interplanetaren Raum ausgestrahlt wird. Den dementsprechenden definitiven Wärmeverlust, welchen das System Erde-Atmosphäre in der mittleren Troposphäre zugunsten des interplanetaren Raums erleidet, bezeichnet man auch als Cooling-to-Space.

Etwas detaillierter als das eben diskutierte simple globale Strahlungsgleichge-

[4]Das Kirchhoff'sche Gesetz besagt, dass im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht das Absorptionsvermögen einer dünnen Luftschicht gleich ihrem Emissionsvermögen ist (siehe Subsektion 2.2.2).

wicht gibt Abbildung 2.1 Einblick in das mittlere globale Energiebudget. Die totale effektive Emissionsfläche des Systems Erde-Atmosphäre, repräsentiert durch die kugelförmige obere Randfläche der vom Treibhauseffekt dominierten bodennahen Atmosphärenregion, ist viermal so groß wie ihre Querschnittsfläche. Da Letztere im Grunde dem totalen Absorptionsquerschnitt des Systems Erde-Atmosphäre entspricht, ist die solare Strahlungsleistung, die im langzeitlichen globalen Mittel lokal[5] ins System Erde-Atmosphäre eingestrahlt wird, folglich durch

$$\overline{S}_0 = S_0/4 \tag{2.4}$$

gegeben. Setzt man den für Abbildung 2.1 maßgeblichen mittleren Solarkonstantenwert von 1372 Wm^{-2} ein, berechnet sich $\overline{S}_0$ zu 343 Wm^{-2}. Von dieser lokal pro Zeiteinheit auf die Atmosphäre einfallenden solaren Energiemenge werden 68 Wm^{-2} (20%) von der Atmosphäre und 169 Wm^{-2} (49%) vom Erdboden absorbiert. Die restlichen 106 Wm^{-2} (31%) werden vom System Erde-Atmosphäre reflektiert und quantifizieren damit dessen mittlere globale Albedo. Im Detail kommt die Sonnenstrahlungsabsorption durch die Atmosphäre zu 71% durch den Absorptionseffekt von Aerosolpartikeln und Gasen (vor allem Wasserdampf und Ozon) sowie zu 29% durch den Absorptionseffekt von Wolken zustande. Die mittlere globale Albedo wiederum beruht zu 65% auf dem Reflexionsvermögen der Wolken, zu 20% auf dem Rückstreuvermögen des Atmosphärengases sowie zu 15% auf dem Reflexionsvermögen des Erdbodens.

Um thermisches Gleichgewicht aufrechtzuerhalten, muss der Erdboden pro Zeiteinheit natürlich genauso viel Energie abgeben, wie er aufnimmt. Ausgehend von einer mittleren globalen Bodentemperatur von 288 K, werden vom Erdboden gemäß dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (siehe (2.2)) 390 Wm^{-2} an Langwellenstrahlung emittiert. Berücksichtigt man neben dieser Langwellenstrahlungsemission nur die 169 Wm^{-2} an Kurzwellenstrahlungsabsorption, ergibt sich in der Leistungsbilanz des Erdbodens folglich ein Defizit von 221 Wm^{-2}. Zufolge des Treibhauseffekts, der, wie aus Abbildung 2.1 ersichtlich wird, im Besonderen auf der Infrarotaktivität von Wolken, Wasserdampf, Kohlendioxid und Aerosolpartikeln beruht, werden dem Erdboden jedoch noch zusätzliche 327 Wm^{-2} an Langwellenstrahlung zur Verfügung gestellt. Unter Hinzunahme dieser Langwellenstrahlungsabsorption geht obiges Leistungsdefizit schließlich in einen Leistungsüberschuss von 106 Wm^{-2} über, den man auch als radiative Erwärmung des Erdbodens bezeichnet. Da für den Erdboden thermisches Gleichgewicht vorausgesetzt wird, besteht natürlich die Notwendigkeit, dass der aus seiner Strahlungsbilanz resultierende Leistungsüberschuss letztendlich ausgeglichen wird. Dies geschieht, wie bereits in Sektion 1.2 und in Subsektion 1.3.2 angedeutet, durch konvektiven Transfer von fühlbarer und latenter Wärme in die Atmosphäre. Die Bei-

[5] Lokal bedeutet in diesem Zusammenhang pro Flächeneinheit.

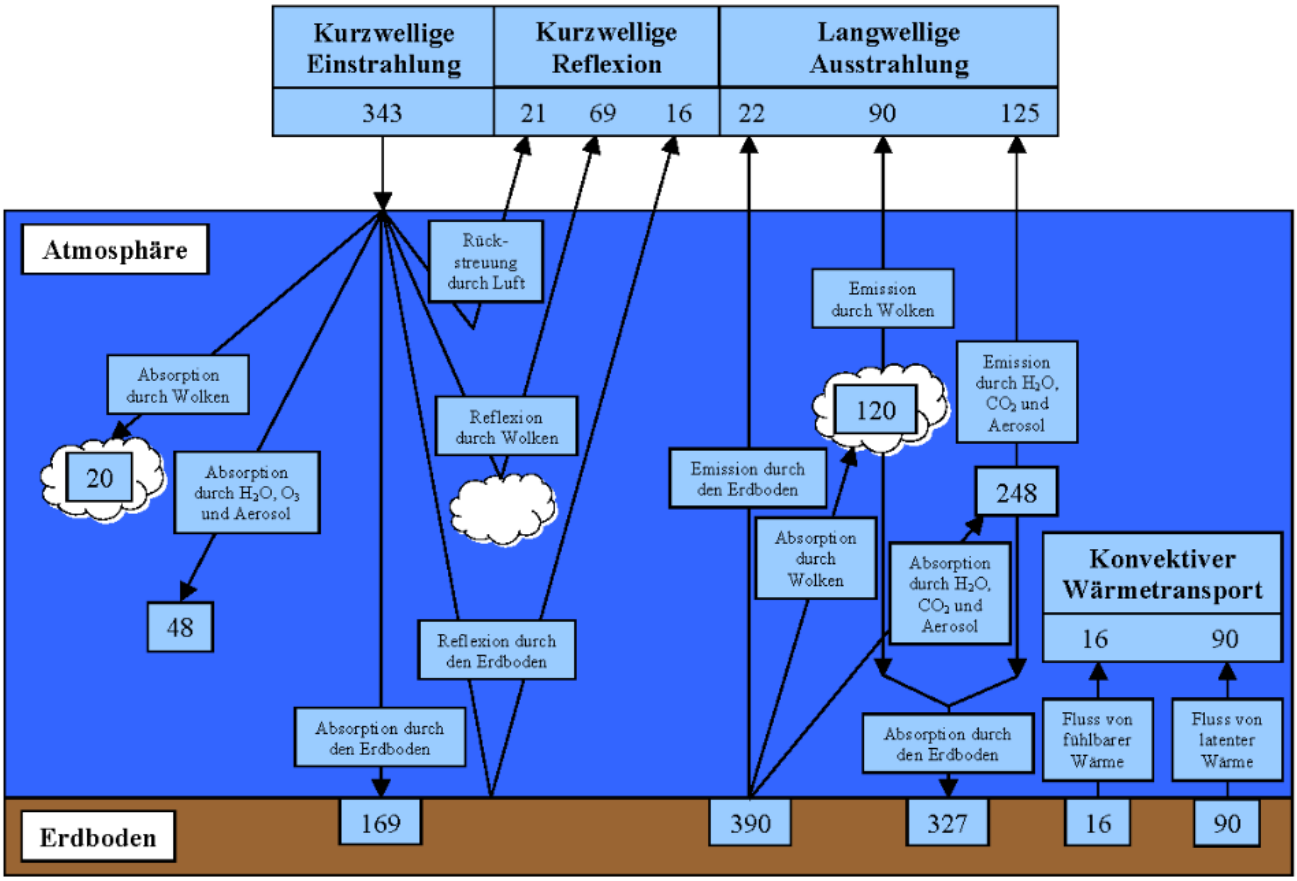


Abbildung 2.1: Das mittlere globale Energiebudget. Die Energieflüsse sind in Wm^{-2} angegeben und beziehen sich auf eine mittlere Solarkonstante von 1372 Wm^{-2} beziehungsweise auf eine mittlere globale Bodentemperatur von 288 K (übernommen aus [16]).

träge zur Ausbalancierung der überschüssigen 106 Wm^{-2} in der Leistungsbilanz des Erdbodens verteilen sich dabei mit 16 Wm^{-2} (15%) auf die Abfuhr von fühlbarer Wärme beziehungsweise mit 90 Wm^{-2} (85%) auf den Abtransport von latenter Wärme.

Damit sich das gesamte System Erde-Atmosphäre in einem Zustand thermischen Gleichgewichts befindet, muss neben der Leistungsbilanz des Erdbodens logischerweise auch die Leistungsbilanz der Atmosphäre ausgeglichen sein. Wie schon erwähnt, nimmt die Atmosphäre 68 Wm^{-2} durch Absorption von Sonnenstrahlung auf. Von den 390 Wm^{-2}, die der Erdboden in Form von Langwellenstrahlung emittiert, werden lediglich 22 Wm^{-2} (6%) direkt in den interplanetaren Raum ausgestrahlt. Die restlichen 368 Wm^{-2} (94%) werden wiederum von

der Atmosphäre absorbiert, und zwar zu 33% von Wolken sowie zu 67% von Treibhausgasen und Aerosolpartikeln. Zufolge des totalen atmosphärischen Absorptionseffekts ergibt sich demnach zunächst ein Überschuss von 436 Wm^{-2} in der Leistungsbilanz der Atmosphäre. Der Abbau dieses Leistungsüberschusses erfolgt durch Langwellenabstrahlung seitens der Atmosphäre. Im Zuge dessen werden 327 Wm^{-2} Richtung Erdboden emittiert und 215 Wm^{-2} (davon 42% von Wolken sowie 58% von Treibhausgasen und Aerosolpartikeln) in den interplanetaren Raum ausgestrahlt, was zur Folge hat, dass in summa summarum der Emissionseffekt der Atmosphäre den atmosphärischen Absorptionseffekt deutlich überkompensiert. In Zahlen drückt sich dies schließlich in einem Leistungsdefizit von 106 Wm^{-2} aus, das man auch als radiative Abkühlung der Atmosphäre bezeichnet. Konsequenterweise ist die radiative Abkühlung der Atmosphäre gleich stark wie die radiative Erwärmung des Erdbodens, weswegen die Leistungsbilanz der Atmosphäre auf Grund der Abgabe von fühlbarer und latenter Wärme durch den Erdboden letzten Endes ausbalanciert ist.

2.1.2 Die Energiegleichung

In der vorhergehenden Subsektion wurden die Grundzüge des Energiehaushalts der Atmosphäre qualitativ erörtert. Damit die Bedeutung des Strahlungstransfers und im Speziellen des Langwellenstrahlungstransfers für den atmosphärischen Energiehaushalt auch quantitativ nachvollziehbar wird, soll nun noch ein kurzer Blick auf die Energiegleichung, die prinzipiell für alle energetischen Betrachtungen in der Atmosphäre den Ausgangspunkt darstellt, geworfen werden.

Die Gesamtenergie der Atmosphäre E setzt sich aus der inneren Energie U, der potenziellen Energie Φ,[6] der kinetischen Energie K sowie der latenten Energie L zusammen:

$$E = U + \Phi + K + L. \tag{2.5}$$

Gleichermaßen gilt für die atmosphärische Gesamtenergie pro Masseneinheit e, die man auch als spezifische Gesamtenergie der Atmosphäre bezeichnet

$$e = u + \phi + k + l, \tag{2.6}$$

wobei u, ϕ, k und l für innere Energie, potenzielle Energie, kinetische Energie und latente Energie pro Masseneinheit stehen. Die Verknüpfung zwischen e und E erfolgt –mit dem Atmosphärenvolumen V_A und der Massendichte ρ– über die Beziehung

$$E = \int\int\int_{V_A} \rho e \, dV. \tag{2.7}$$

[6] Gemeint ist die mit dem terrestrischen Schwerefeld verknüpfte potenzielle Energie.

Analoge Relationen sind verständlicherweise für die spezifischen Energien u, ϕ, k und l gültig. Darüber hinaus können diese, wie sich zeigt, in folgender Form angeschrieben werden (siehe zum Beispiel [10] und [11]):

$$u = c_V T, \tag{2.8}$$

$$\phi = \int_{z'=0}^{z} g \, dz', \tag{2.9}$$

$$k = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2, \tag{2.10}$$

$$l = L_E q_{\mathrm{H_2 0}}. \tag{2.11}$$

Dabei ist c_V die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, T die Temperatur, g der Betrag der Schwerebeschleunigung, z die Höhe über dem Erdboden, $\mathbf{v}$ die vektorielle Windgeschwindigkeit, L_E die Evaporationswärme und $q_{\mathrm{H_2 0}}$ die spezifische Feuchte.[7] (2.8) beruht auf der Annahme, dass die Luft als ideales Gas mit temperaturunabhängigem c_V behandelt werden kann. Die thermodynamischen Variablen sind folglich miteinander über die Zustandsgleichung

$$p = nkT = \rho RT, \tag{2.12}$$

wobei p für Druck, n für Teilchenanzahldichte, k für die Boltzmann-Konstante und R für die individuelle Gaskonstante steht, verknüpft. Letztere gehorcht –mit der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p– der Beziehung

$$R = c_p - c_V. \tag{2.13}$$

(2.9) wiederum geht davon aus, dass die Abweichungen des Schwerebeschleunigungsvektors von der Vertikalen (i. e. von der Zenitrichtung) nicht berücksichtigt werden müssen und dass weiters $\phi(z=0) = 0$ gilt. Für (2.11) schließlich wird –was in den meisten Fällen zulässig ist– vorausgesetzt, dass latente Wärme lediglich durch den Übergang von Wasserdampf in die flüssige Phase als fühlbare Wärme freigesetzt wird.

Will man nun quantitative Aussagen in Bezug auf den Energiehaushalt der Atmosphäre als Ganzen beziehungsweise hinsichtlich der inhärenten Energietransformationen treffen, benötigt man Bilanzgleichungen für die einzelnen atmosphärischen Energieformen.[8] Die Bilanzgleichung für die potenzielle Energie ergibt sich –mit $v_z = dz/dt$ als vertikaler Komponente der vektoriellen Windgeschwindigkeit

[7] Die spezifische Feuchte ist das Verhältnis der Wasserdampfmassendichte zur Gesamtmassendichte (siehe auch Anhang B).

[8] Mit der Ableitung dieser Bilanzgleichungen befassen sich z. B. [10] und [11].

und unter Berücksichtigung von $g \neq g(t)$– aus (2.9) durch Bildung der substanziellen Ableitung von ϕ nach der Zeit sofort als

$$\frac{d\phi}{dt} = g v_z. \tag{2.14}$$

Die Bilanzgleichung für die innere Energie wiederum kann aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung gewonnen werden und lautet für ein ideales Gas mit temperaturunabhängigem c_p

$$\frac{du}{dt} = \dot{q}_d - \frac{p}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v}. \tag{2.15}$$

Die in (2.15) auftretende spezifische diabatische Heizrate $\dot{q}_d$ ist definiert durch

$$\dot{q}_d = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} - L_E\,(\varepsilon - \gamma) - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{j}_W^D + \frac{1}{\rho}\mathbf{P} : \nabla \mathbf{v}. \tag{2.16}$$

Dabei ist $\mathbf{F}_{\text{rad}}$ die Strahlungsflussdichte, ε die spezifische Evaporationsrate, γ die spezifische Kondensationsrate, $\mathbf{j}_W^D$ die Wärmestromdichte[9] und $\mathbf{P}$ der Reibungstrensor. Die Bilanzgleichung für die kinetische Energie erhält man unmittelbar aus der Bewegungsgleichung als

$$\frac{dk}{dt} = -g v_z - \frac{1}{\rho}\mathbf{v} \cdot \nabla p + \frac{1}{\rho}\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}). \tag{2.17}$$

Die Bilanzgleichung für die latente Energie schließlich kann, so L_E als homogen angesehen wird, in der Form

$$\frac{dl}{dt} = L_E\,(\varepsilon - \gamma) - \frac{1}{\rho}L_E \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{H}_2\text{O}}^D \tag{2.18}$$

angeschrieben werden, wobei $\mathbf{j}_{\text{H}_2\text{O}}^D$ für die Wasserdampfdiffusionsstromdichte[10] steht.

Die Energiegleichung, gegeben durch die Bilanzgleichung für die atmosphärische Gesamtenergie, bekommt man gemäß (2.6) durch Addition von (2.14), (2.15), (2.17) und (2.18). Wie in Anhang C gezeigt wird, gelangt man letztendlich zu der Relation

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_T, \tag{2.19}$$

mit der totalen nicht-konvektiven Energiestromdichte

$$\mathbf{j}_T = \mathbf{F}_{\text{rad}} + p\mathbf{v} + \mathbf{j}_W^D + L_E \mathbf{j}_{\text{H}_2\text{O}}^D - \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \tag{2.20}$$

[9] i. e. die mit molekularer Wärmeleitung verknüpfte Stromdichte

[10] i. e. die mit molekularer Diffusion von Wasserdampf verknüpfte Stromdichte

Eine alternative Formulierung der Energiegleichung lautet:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho e\mathbf{v} + \mathbf{j}_T)\,. \tag{2.21}$$

$\rho e\mathbf{v}$ repräsentiert dabei die totale konvektive Energiestromdichte. Diese beinhaltet ihrer Definition zufolge den Energietransport durch das atmosphärische Windfeld. Die totale nicht-konvektive Energiestromdichte $\mathbf{j}_T$ umfasst dementsprechend alle übrigen Möglichkeiten, wie Energietransport in der Atmosphäre vonstatten gehen kann.

2.2 Grundlagen des LW-Strahlungstransfers

Vernachlässigt man molekulare Wärmeleitung und jegliche Reibungsprozesse und geht man außerdem davon aus, dass die Atmosphäre dauerhaft frei von Wolken ist, vereinfacht sich die Bilanzgleichung für die innere Energie der Atmosphäre ((2.15) unter Berücksichtigung von (2.16)) zu

$$\frac{du}{dt} + \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{F}_{\text{rad}} = \dot{q}_{\text{rad}}, \tag{2.22}$$

wobei $\dot{q}_{\text{rad}}$ die spezifische Strahlungsheizrate repräsentiert. Die Strahlungsflussdichte $\mathbf{F}_{\text{rad}}$ kann, wie bereits in Subsektion 2.1.1 angesprochen, aus der Langwellenstrahlungsflussdichte $\mathbf{F}_{\text{LW}}$ und der Kurzwellenstrahlungsflussdichte $\mathbf{F}_{\text{SW}}$ zusammengesetzt werden:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \mathbf{F}_{\text{LW}} + \mathbf{F}_{\text{SW}}. \tag{2.23}$$

Analoges ist, wie aus (2.22) mit Hilfe von (2.23) sofort ersichtlich wird, für die spezifische Strahlungsheizrate $\dot{q}_{\text{rad}}$ möglich:

$$\dot{q}_{\text{rad}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{F}_{\text{LW}} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{F}_{\text{SW}} = \dot{q}_{\text{LW}} + \dot{q}_{\text{SW}}. \tag{2.24}$$

Durch Einsetzen von (2.8), (2.12) und (2.13)[11] und unter Berücksichtigung von (C.9) kann (2.22) auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_{\text{rad}} &= c_V\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho}\left[\nabla\cdot(\rho RT\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot\nabla p\right] \;= \\
&= c_V\frac{dT}{dt} + (c_p - c_V)\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p\right) \;= \\
&= c_p\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

[11] c_V, c_p und R werden als Konstanten angesehen.

Nimmt man nun an, dass in der Atmosphäre Windstille herrscht und die Druckverteilung stationär ist (i. e. $\partial p/\partial t = 0$), ergibt sich $\dot{q}_{\text{rad}}$ schließlich als

$$\dot{q}_{\text{rad}} = c_P \frac{\partial T}{\partial t} = c_P \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{rad}}. \tag{2.26}$$

Dabei stellt $(\partial T/\partial t)_{\text{rad}}$ die radiative Temperaturänderungsrate dar. Diese ist, wie zunächst durch Gleichsetzen von (2.26) mit (2.22) und dann unter Zuhilfenahme von (2.23) folgt, auch durch die Relationen

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{rad}} = -\frac{1}{c_p \rho} \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} \tag{2.27}$$

und

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{rad}} = -\frac{1}{c_p \rho} \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{LW}} - \frac{1}{c_p \rho} \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{SW}} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{LW}} + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{SW}} \tag{2.28}$$

gegeben.

2.2.1 Die Grundgleichung des Strahlungstransfers

Der Ausgangspunkt für alle Strahlungstransferbetrachtungen in der Atmosphäre ist das Lambert'sche Gesetz (siehe zum Beispiel [7]). Diesem zufolge verringert sich die von der Wellenlänge λ abhängige Radianz des atmosphärischen Strahlungsfeldes I_λ[12] entlang dem Strahlenweg s auf Grund von Extinktionsvorgängen in folgender Weise:

$$dI_\lambda = -\overline{k}_\lambda \rho I_\lambda ds. \tag{2.29}$$

Der in (2.29) auftretende mittlere spezifische Extinktionskoeffizient $\overline{k}_\lambda$ mit der Einheit m^2kg^{-1} weist ebenfalls eine Wellenlängenabhängigkeit auf und ist durch den Ausdruck

$$\overline{k}_\lambda = \sum_i k_\lambda^{(i)} q_i \tag{2.30}$$

gegeben. $k_\lambda^{(i)}$ steht dabei für den spezifischen Extinktionskoeffizient und $q_i = \rho_i/\rho$ im Prinzip für das Massenmischungsverhältnis[13] des i-ten Atmosphärenbestandteils. Der spezifische Extinktionskoeffizient $k_\lambda^{(i)}$ kann als diejenige normal zur

[12] Die Radianz ist als die direktionale monochromatische Intensität mit der Einheit $\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1}\text{sr}^{-1}$ zu verstehen.

[13] Das Massenmischungsverhältnis ist eigentlich auf die Massendichte der trockenen Luft bezogen. Der Unterschied zwischen der tatsächlichen Massendichte und der Massendichte der trockenen Luft kann jedoch häufig in guter Näherung vernachlässigt werden (siehe auch Anhang B).

Strahlenwegrichtung orientierte Fläche gedeutet werden, welche pro Kilogramm des betrachteten Atmosphärenbestandteils "wirksam" für Extinktion ist. Da Extinktion nichts anderes als den Sammelbegriff für Absorption und Streuung darstellt, gilt für $k_\lambda^{(i)}$ weiters die Beziehung

$$k_\lambda^{(i)} = \alpha_\lambda^{(i)} + \sigma_\lambda^{(i)}, \tag{2.31}$$

wobei $\alpha_\lambda^{(i)}$ den spezifischen Absorptionskoeffizient und $\sigma_\lambda^{(i)}$ den spezifischen Streukoeffizient des i-ten Atmosphärenbestandteils repräsentiert.

In Konkurrenz zur Abschwächung der Radianz des atmosphärischen Strahlungsfeldes durch Extinktion steht im allgemeinen Fall eine Verstärkung derselben, welche auf Strahlungsemission seitens des Atmosphärengases und Mehrfachstreuprozesse zurückgeht. Wie der Name sagt, bedeutet Mehrfachstreuung, dass Photonen auf ihrem Weg quer durch die Atmosphäre mehrmals im Zuge von Streuung abgelenkt werden. Dies hat zur Folge, dass im Hinblick auf eine bestimmte Strahlenwegrichtung neben dem Radianzverlust durch Herausstreuung auch der Radianzgewinn durch Hineinstreuung aus allen übrigen Strahlenwegrichtungen eine Rolle spielt. Damit man die tatsächliche Änderung der Radianz des atmosphärischen Strahlungsfeldes entlang dem Strahlenweg s erhält, muss (2.29) folglich um einen entsprechenden Quellterm erweitern werden:

$$dI_\lambda = -\overline{k}_\lambda \rho I_\lambda ds + \overline{j}_\lambda \rho ds. \tag{2.32}$$

Der in (2.32) auftretende mittlere spezifische Quellfunktionskoeffizient $\overline{j}_\lambda$ mit der Einheit $\mathrm{W}\mu\mathrm{m}^{-1}\mathrm{sr}^{-1}\mathrm{kg}^{-1}$ ist als diejenige direktionale monochromatische Strahlungsleistung zu verstehen, durch die das atmosphärische Strahlungsfeld in der Strahlenwegrichtung pro Kilogramm Luft verstärkt wird. Schreibt man (2.32) um, ergibt sich das Lambert'sche Gesetz schließlich in der Form

$$\frac{dI_\lambda}{\overline{k}_\lambda \rho ds} = -I_\lambda + \overline{J}_\lambda, \tag{2.33}$$

wobei mit $\overline{J}_\lambda$ die mittlere Quellfunktion eingeführt wurde. Für diese gilt auf der einen Seite die Relation

$$\overline{J}_\lambda = \frac{\overline{j}_\lambda}{\overline{k}_\lambda} = \sum_i \frac{j_\lambda^{(i)}}{\overline{k}_\lambda} q_i = \sum_i J_\lambda^{(i)} q_i \tag{2.34}$$

und auf der anderen Seite –mit der mittleren Emissionsquellfunktion $\overline{J}_\lambda^{(e)}$ und der mittleren Streuquellfunktion $\overline{J}_\lambda^{(s)}$– die Beziehung

$$\overline{J}_\lambda = \overline{J}_\lambda^{(e)} + \overline{J}_\lambda^{(s)}. \tag{2.35}$$

Zumal noch kein Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem besteht, repräsentiert (2.33) die allgemeinste Form der Strahlungstransfergleichung. Konsequenterweise ist (2.33) als Basis für alle nachfolgenden, den Langwellenstrahlungstransfer in der Atmosphäre betreffenden Betrachtungen aufzufassen.

2.2.2 Das Planck'sche Strahlungsgesetz

Im Wellenlängenbereich der Langwellenstrahlung kann die Streuung an Gasmolekülen, die so genannte Rayleigh-Streuung, für gewöhnlich ausgespart werden.[14] Sehr wohl von Relevanz ist indessen die Streuung an Wolken- und Aerosolpartikeln, die so genannte Mie-Streuung, deren Implementierung in Langwellenstrahlungstransferbetrachtungen zudem die Berücksichtigung von Mehrfachstreuprozessen notwendig macht (siehe zum Beispiel [7] und [8]). In der weiteren Folge soll lediglich auf den Fall einer klaren Atmosphäre, i. e. einer Atmosphäre, die frei von Wolken und aerosolhaltigen Schichten ist, eingegangen werden. Zum einen darf somit in (2.33) via (2.31) der mittlere spezifische Streukoeffizient $\overline{\sigma}_\lambda$ gleich null gesetzt werden. Zum anderen braucht die mittlere Quellfunktion $\overline{J}_\lambda$ dann lediglich auf Emissionsvorgänge im Atmosphärengas zurückgeführt werden. Berücksichtigt man diese zwei Fakten und verwendet man außerdem statt der Wellenlänge die Wellenzahl $\nu = 1/\lambda$ geht (2.33) in

$$\frac{dI_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \rho ds} = -I_\nu + \overline{J}_\nu^{(e)} \tag{2.36}$$

über.

Gemäß dem Kirchhoff'schen Gesetz ist das Emissionsvermögen eines Körpers im Zustand thermodynamischen Gleichgewichts gleich seinem Absorptionsvermögen (siehe zum Beispiel [7] und [13]). Ein in dieser Hinsicht idealer Körper, welcher als "schwarzer" Körper bezeichnet wird, absorbiert die gesamte ihm zur Verfügung gestellte Strahlungsleistung. Gleichzeitig emittiert er dieselbe Strahlungsleistung, da er sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Die Radianz der Strahlungsemission eines schwarzen Körpers ist durch das Planck'sche Strahlungsgesetz gegeben. Unter der Annahme, dass unpolarisierte Strahlung emittiert wird, und bei Verwendung der Wellenzahl schreibt sich dieses als

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3 c^2}{\exp\left(\frac{hc\nu}{kT}\right) - 1}, \tag{2.37}$$

wobei h für die Planck'sche Konstante und c für die Lichtgeschwindigkeit steht.[15]

[14] Der Rayleigh-Streukoeffizient ist proportional zu $1/\lambda^4$ und wird damit mit zunehmender Wellenlänge rasch kleiner (siehe zum Beispiel [7]).

[15] Infolge des Bezugs auf die Wellenzahl ist die Einheit von B_ν $\mathrm{Wm}^{-2}\left(\mathrm{cm}^{-1}\right)^{-1}\mathrm{sr}^{-1}$. $B_\lambda(T)$ erhält man aus $B_\nu(T)$ über die Beziehung $B_\lambda(T)\,d\lambda = B_\nu(T)\,d\nu$.

Eine Illustration des Planck'schen Strahlungsgesetzes liefern Abbildung 2.2 und Abbildung 2.3.

Ist φ der Azimut und ϑ die Poldistanz in einem Koordinatensystem, dessen vertikale Achse normal auf ein Oberflächenelement des betrachteten schwarzen Körpers steht, und integriert man (2.37) über den Halbraum, in den von diesem Oberflächenelement aus abgestrahlt wird, erhält man:

$$F_\nu(T) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} B_\nu(T) \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \pi B_\nu(T). \tag{2.38}$$

$F_\nu(T)$ wird dabei als monochromatische Ausstrahlung des schwarzen Körpers bezeichnet. Der Faktor $\cos\vartheta$ im Integrand von (2.38) rührt von der Tatsache her, dass nur die Komponente der vektoriellen Radianz normal zum emittierenden Oberflächenelement zur Ausstrahlung beiträgt. Integration von (2.38) über den gesamten Wellenzahlbereich führt schließlich, wie in Anhang D demonstriert wird, zum Stefan-Boltzmann-Gesetz. Dieses fand bereits in Subsektion 2.1.1 Anwendung:

$$F(T) = \int_{\nu=0}^{\infty} \pi B_\nu(T) d\nu = \sigma T^4. \tag{2.39}$$

Im Gegensatz zu einem schwarzen Körper absorbiert ein "grauer" Körper nicht die gesamte ihm zur Verfügung gestellte Strahlungsleistung.[16] Sofern ein grauer Körper sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, gilt jedoch weiterhin das Kirchhoff'sche Gesetz, was zur Folge hat, dass seine Emissivität, definiert als das Verhältnis der von seiner Oberfläche emittierten Radianz zur theoretischen Planck'schen Radianz, zwar kleiner als eins, aber immer noch gleich seiner (analog definierten) Absorptivität ist. Fasst man eine dünne Luftschicht als grauen Körper auf,[17] bedeutet dies, dass der mittlere spezifische Emissionsquellfunktionskoeffizient $\overline{j}_\nu^{(e)}$ durch

$$\overline{j}_\nu^{(e)} = \overline{\alpha}_\nu B_\nu(T) < B_\nu(T) \tag{2.40}$$

und –unter Berücksichtigung von (2.34)– die mittlere Emissionsquellfunktion $\overline{J}_\nu^{(e)}$ durch

$$\overline{J}_\nu^{(e)} = B_\nu(T) \tag{2.41}$$

[16] Ein grauer Körper ist darob wesentlich realistischer als ein schwarzer Körper.

[17] Die Absorptivität einer dünnen Luftschicht ist auch im Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung kleiner als eins.

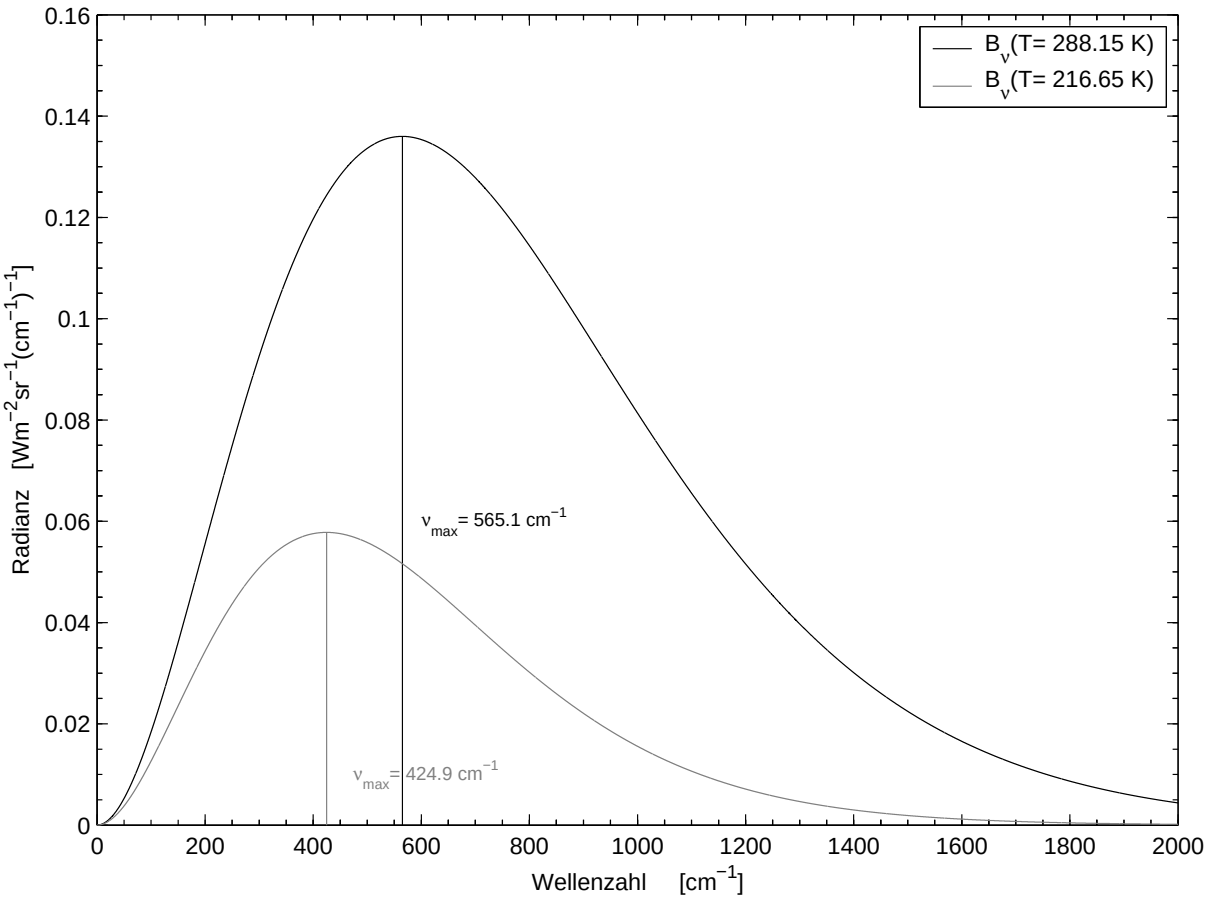


Abbildung 2.2: Die Planck'sche Radianz im Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung für $T = 288.15$ K bzw. $T = 216.65$ K (Boden- bzw. Tropopausentemperatur gemäß der US-Standardatmosphäre 1976 (siehe Subsektion 1.3.2)). Einer Wellenzahl von 2000 cm^{-1} entspricht eine Wellenlänge von 5 μm.

gegeben ist. Das Lambert'sche Gesetz von (2.36) kann damit letztendlich in folgender Form angeschrieben werden (Schwarzschild-Gleichung):

$$\frac{dI_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \rho ds} = -I_\nu + B_\nu(T)\,. \tag{2.42}$$

Es muss betont werden, dass die Verwendung von (2.42) im Rahmen des atmosphärischen Langwellenstrahlungstransfers an die Gültigkeit des Kirchhoff'schen Gesetzes gebunden ist. Nun steht aber die Frage im Raum, inwieweit das Kirchhoff'sche Gesetz auf die Atmosphäre überhaupt angewandt werden darf, zumal benachbarte lokalisierte Atmosphärenbereiche offensichtlich nicht miteinander im thermischen Gleichgewicht sind und die Definition eines thermostatischen Tem-

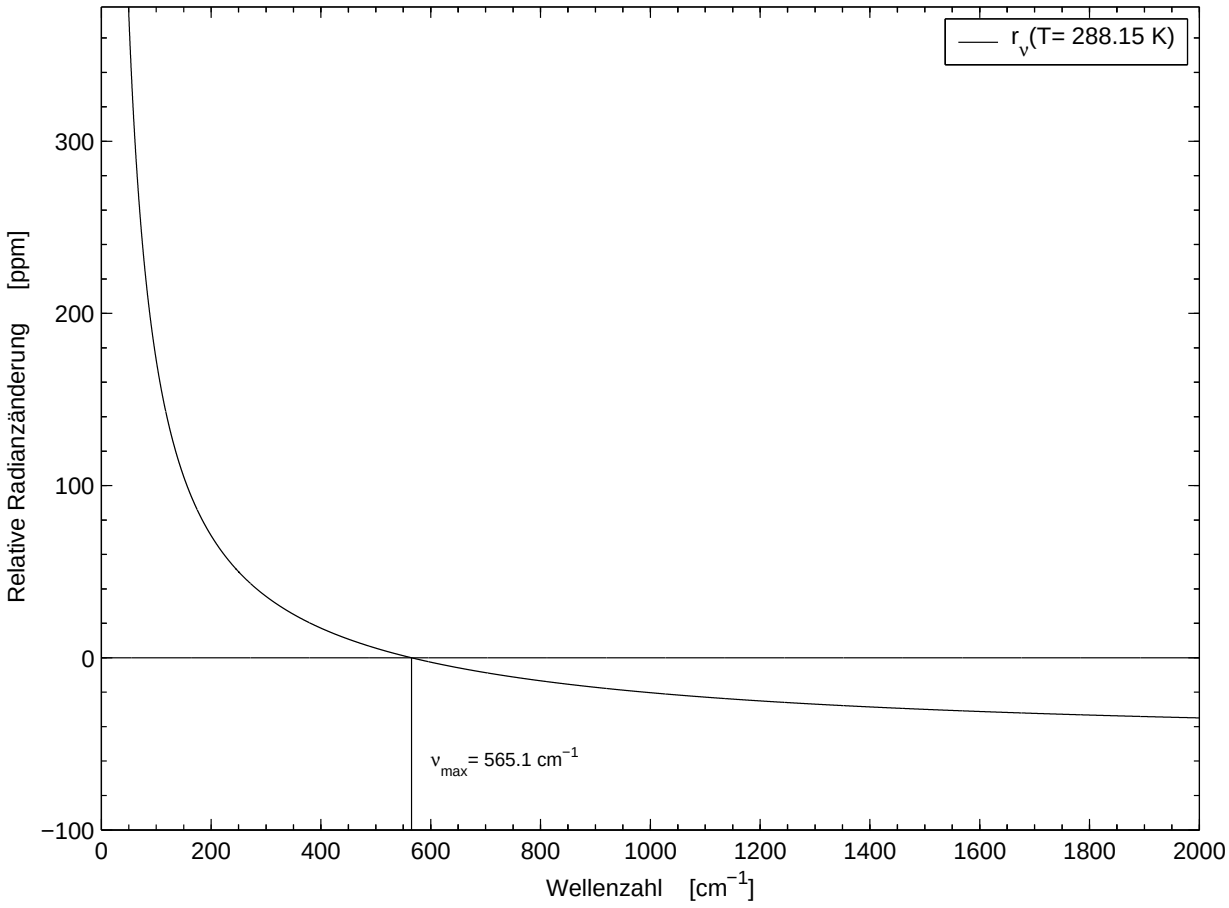


Abbildung 2.3: Die relative Änderung der Planck'schen Radianz, gegeben durch $r_\nu(T) = B'_\nu(T)/B_\nu(T)$, im Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung für $T = 288.15$ K. Einer Wellenzahl von 2000 cm^{-1} entspricht eine Wellenlänge von 5 μm.

peraturbegriffs somit auf den ersten Blick bedenklich erscheint. In der unteren und mittleren Atmosphäre gilt weitgehend die Gibbs'sche Fundamentalgleichung der Thermostatik (siehe zum Beispiel [13]), weswegen es dort zulässig ist, die infinitesimale Umgebung jedes festen Orts als offenes Gleichgewichtssystem, in dem die Temperatur im thermostatischen Sinn definiert werden kann, anzusehen. Infolgedessen kann für die Atmosphäre –obwohl insgesamt als Nichtgleichgewichtssystem identifiziert– bis in eine Höhe von 60-70 km ein so genanntes lokales thermodynamisches Gleichgewicht vorausgesetzt werden. Im Kontext ebendieses lokalen thermodynamischen Gleichgewichts ist dann die Gültigkeit des Kirchhoff'schen Gesetzes, des Planck'schen Strahlungsgesetzes und in letzter Konsequenz der Schwarzschild-Gleichung in der Atmosphäre zu sehen.

2.2.3 LW-Strahlungstransfer in einer plan-parallelen Atmosphäre

In der weiteren Folge soll ein Wellenzahlbereich betrachtet werden, in dem lediglich ein infrarotaktiver Luftbestandteil wirksam ist. Bezeichnet man dessen Massendichte mit ρ_a und dessen spezifischen Absorptionskoeffizient mit k_ν, schreibt sich (2.42) als

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu \rho_a ds} = -I_\nu + B_\nu(T). \tag{2.43}$$

Da $I_\nu = I_\nu(\mathbf{s}, t)$ gilt, wobei $\mathbf{s}$ den Ortsvektor des Strahlenweges darstellt, folgt zunächst

$$dI_\nu = \nabla I_\nu \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt \tag{2.44}$$

und dann

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \hat{\omega} \cdot \nabla I_\nu + \frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}. \tag{2.45}$$

$\hat{\omega} = d\mathbf{s}/ds$ steht dabei für den Einheitsvektor in Strahlenwegrichtung. Geht man nun davon aus, dass die explizite Zeitabhängigkeit der Radianz hinreichend klein gegen deren Ortsabhängigkeit ist, darf das Langwellenstrahlungsfeld näherungsweise als stationär aufgefasst werden und der zweite Term auf der rechten Seite von (2.45) folglich vernachlässigt werden:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \hat{\omega} \cdot \nabla I_\nu. \tag{2.46}$$

Beschränkt man darüber hinaus die Untersuchung des Langwellenstrahlungsfeldes auf einen in der Horizontalen lokalisierten Atmosphärenbereich, woraufhin näherungsweise angenommen werden kann, dass sowohl die thermodynamischen Variablen als auch die Zusammensetzung der Atmosphäre nur von der Höhe über dem Erdboden abhängig sind und dem Langwellenstrahlungsfeld ergo eine horizontale Symmetrie und eine azimutale Isotropie zugrunde liegen, vereinfacht sich (2.46) –mit dem Einheitsvektor in vertikaler Richtung $\hat{\mathbf{z}}$ und der Zenitdistanz θ– weiter zu

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \hat{\omega} \cdot \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial I_\nu}{\partial z}. \tag{2.47}$$

Durch Einsetzen von (2.47) in (2.43) ergibt sich schließlich:

$$\mu \frac{dI_\nu(z,\mu)}{k_\nu(z)\,\rho_a(z)\,dz} = -I_\nu(z,\mu) + B_\nu(T(z)). \tag{2.48}$$

Dabei wurde $\cos\theta = \mu$ gesetzt und für die partielle Ableitung $\partial/\partial z$ die totale Ableitung d/dz geschrieben.[18]

[18](2.43) ist eine partielle Differenzialgleichung, (2.48) indessen nur mehr eine gewöhnliche.

(2.48) ist die Schwarzschild-Gleichung für eine plan-parallele Atmosphäre. Eine etwas übersichtlichere Darstellung dieser inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung mit variablen Koeffizienten erhält man durch Einführung der optischen Tiefe τ_ν. Dies geschieht über die Gleichung

$$d\tau_\nu = -k_\nu \rho_a dz. \tag{2.49}$$

Integration von (2.49) führt unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die optische Tiefe positiv in negativer z-Richtung gezählt werden soll, zu

$$\tau_\nu(z) = \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} d\tau'_\nu = -\int_{z'=z_\infty}^{z} k_\nu(z')\,\rho_a(z')\,dz' = \int_{z'=z}^{z_\infty} k_\nu(z')\,\rho_a(z')\,dz', \tag{2.50}$$

wobei mit z_∞ die Höhe, in der die obere Berandung der Atmosphäre liegt, gemeint ist. Wie bereits in Subsektion 1.3.2 erwähnt, sind oberhalb der untersten Thermosphärenschichten keine nennenswerten Mengen an Treibhausgasen mehr vorhanden. In der Praxis braucht die Integration in (2.50) daher maximal bis in eine Höhe von rund 100 km durchgeführt werden.[19] Setzt man (2.49) in (2.48) ein, bekommt man schließlich

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu,\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu,\mu) - B_\nu(T(\tau_\nu)) \tag{2.51}$$

als günstigste Form der Schwarzschild-Gleichung für eine plan-parallele Atmosphäre.

2.2.4 Radianz

Um zu einer Lösung von (2.51) zu gelangen, trennt man zunächst die ausgestrahlte Radianz I_ν^+ ($0 \le \theta \le \pi/2$) von der eingestrahlten Radianz I_ν^- ($\pi/2 \le \theta \le \pi$):

$$\mu \frac{dI_\nu^+(\tau_\nu,\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) - B_\nu(T(\tau_\nu)), \tag{2.52}$$

$$-\mu \frac{dI_\nu^-(\tau_\nu,-\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) - B_\nu(T(\tau_\nu)). \tag{2.53}$$

In (2.53) wurde für μ die Variable $|\mu| = -\mu$ substituiert und daraufhin $|\mu|$ wieder in μ umbenannt. Dementsprechend gehorcht μ sowohl in (2.52) als auch in (2.53) der Ungleichung $0 \le \mu \le 1$.[20] Wie in Anhang E demonstriert wird, ergibt sich die

[19] Streng genommen variiert die Höhe, in der die obere Integrationsgrenze in (2.50) anzusetzen ist, natürlich von Treibhausgas zu Treibhausgas (siehe dazu auch Subsektion 1.3.1).

[20] An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in einer plan-parallelen Atmosphäre μ, so die Strahlenwegkrümmung vernachlässigt wird, keine Höhenabhängigkeit aufweist.

Lösung der Schwarzschild-Gleichung für eine plan-parallele Atmosphäre, deren optischen Tiefe gleich τ_{0_ν} ist, zunächst als

$$\begin{aligned} I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) &= I_\nu^+(\tau_{0_\nu},\mu)\,e^{-(\tau_{0_\nu}-\tau_\nu)/\mu} + \\ &\quad + \int_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} \frac{1}{\mu} B_\nu(\tau'_\nu)\,e^{-(\tau'_\nu-\tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu, \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} I_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) &= I_\nu^-(0,-\mu)\,e^{-\tau_\nu/\mu} + \\ &\quad + \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} \frac{1}{\mu} B_\nu(\tau'_\nu)\,e^{-(\tau_\nu-\tau'_\nu)/\mu} d\tau'_\nu. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Die ausgestrahlte Radianz am unteren Rand der Atmosphäre ($\tau_\nu = \tau_{0_\nu}$, $z = 0$) ist durch die Strahlungsemission des Erdbodens gegeben. Folglich gilt:

$$I_\nu^+(\tau_{0_\nu},\mu) = I_\nu^+(\tau_{0_\nu}) = \varepsilon_{B_\nu} B_\nu(\tau_{0_\nu}). \tag{2.56}$$

Der Wert der dabei eingeführten Emissivität des Erdbodens ε_{B_ν} kann im Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung größtenteils gleich eins gesetzt werden. Die eingestrahlte Radianz am oberen Rand der Atmosphäre ($\tau_\nu = 0$, $z = z_\infty$) darf wiederum angesichts der Tatsache, dass die Radianz des solaren Strahlungsfeldes im Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung sehr klein ist und die obere Atmosphärenberandung keine Strahlungsquelle im eigentlichen Sinn repräsentiert, vernachlässigt werden:

$$I_\nu^-(0,-\mu) \cong 0. \tag{2.57}$$

Mit den zwei durch (2.56) und (2.57) erfassten Randbedingungen schreibt sich die integrierte Schwarzschild-Gleichung dann als

$$\begin{aligned} I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) &= \varepsilon_{B_\nu} B_\nu(\tau_{0_\nu})\,e^{-(\tau_{0_\nu}-\tau_\nu)/\mu} + \\ &\quad + \int_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} \frac{1}{\mu} B_\nu(\tau'_\nu)\,e^{-(\tau'_\nu-\tau_\nu)/\mu} d\tau'_\nu, \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$I_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) = \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} \frac{1}{\mu} B_\nu(\tau'_\nu)\,e^{-(\tau_\nu-\tau'_\nu)/\mu} d\tau'_\nu. \tag{2.59}$$

Zwecks Gewinnung einer konsistenteren Darstellung von (2.58) und (2.59) wird nun an dieser Stelle über die Relation

$$T_\nu(\tau_\nu/\mu) = e^{-\tau_\nu/\mu} \tag{2.60}$$

die monochromatische Transmissionsfunktion T_ν implementiert. Leitet man diese nach der optischen Tiefe ab, erhält man die Beziehung

$$\frac{dT_\nu(\tau_\nu/\mu)}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{\mu}e^{-\tau_\nu/\mu} = -\frac{1}{\mu}T_\nu(\tau_\nu/\mu). \tag{2.61}$$

Durch Einsetzen von (2.60) und (2.61) in (2.58) und (2.59) kann die integrierte Schwarzschild-Gleichung schließlich durch

$$\begin{aligned} I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) &= \varepsilon_{B_\nu} B_\nu(\tau_{0_\nu})\, T_\nu[(\tau_{0_\nu}-\tau_\nu)/\mu] - \\ &\quad - \int_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} B_\nu(\tau'_\nu)\frac{dT_\nu[(\tau'_\nu-\tau_\nu)/\mu]}{d\tau'_\nu}d\tau'_\nu, \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$I_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) = \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} B_\nu(\tau'_\nu)\frac{dT_\nu[(\tau_\nu-\tau'_\nu)/\mu]}{d\tau'_\nu}d\tau'_\nu \tag{2.63}$$

ausgedrückt werden.[21]

Normalerweise ist weniger die Radianz des Langwellenstrahlungsfeldes $I_\nu^\pm$, sondern vielmehr die wellenzahlintegrierte direktionale Intensität $I_{\Delta\nu}^\pm$ von Interesse:

$$I_{\Delta\nu}^\pm(\tau_{\overline{\nu}},\pm\mu) = \int_{\Delta\nu} I_\nu^\pm(\tau_\nu,\pm\mu)\,d\nu. \tag{2.64}$$

Für den Mittelwert von $I_\nu^\pm$ im Wellenzahlband $\Delta\nu$, den man auch als spektrale Radianz $I_{\overline{\nu}}^\pm$ bezeichnet, gilt:

$$I_{\overline{\nu}}^\pm(\tau_{\overline{\nu}},\pm\mu) = \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} I_\nu^\pm(\tau_\nu,\pm\mu)\,d\nu = \frac{I_{\Delta\nu}^\pm(\tau_{\overline{\nu}},\pm\mu)}{\Delta\nu}. \tag{2.65}$$

Betrachtet man nun ein schmales Wellenzahlband, in dem einerseits, wie zu Beginn der vorhergehenden Subsektion vorausgesetzt wurde, nur ein infrarotaktiver Luftbestandteil wirksam ist und andererseits die Variabilität der Bodenemissivität wie auch der Planck'schen Radianz vernachlässigt werden kann,[22] ergibt sich für die aus- beziehungsweise eingestrahlte spektrale Radianz durch Integration von

[21] Bei der Ableitung von (2.62) und (2.63) ist zu bedenken, dass $d/d(\tau'_\nu-\tau_\nu) \to d/d\tau'_\nu$ und $d/d(\tau_\nu-\tau'_\nu) \to -d/d\tau'_\nu$ gilt.

[22] Siehe dazu auch Abbildung 2.3.

(2.62) und (2.63) im ν-Raum:

$$I_{\overline{\nu}}^{+}(z,\mu) = \varepsilon_{B_{\overline{\nu}}} B_{\overline{\nu}}(0)\,\frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} T_\nu(z/\mu)\,d\nu + \tag{2.66}$$
$$+\int_{z'=0}^{z} dz' B_{\overline{\nu}}(z')\,\frac{d}{dz'}\left\{\frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} T_\nu\left[(z-z')/\mu\right]d\nu\right\},$$

$$I_{\overline{\nu}}^{-}(z,-\mu) = -\int_{z'=z}^{z_\infty} dz' B_{\overline{\nu}}(z')\,\frac{d}{dz'}\left\{\frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} T_\nu\left[(z'-z)/\mu\right]d\nu\right\}. \tag{2.67}$$

Wegen der lästigen Wellenzahlabhängigkeit von $d\tau_\nu$ wurde dabei wieder z als Höhenvariable eingeführt.[23] $\varepsilon_{B_{\overline{\nu}}}$ repräsentiert den Mittelwert der Bodenemissivität und $B_{\overline{\nu}}$ den Mittelwert der Planck'schen Radianz im Wellenzahlband $\Delta\nu$. Definiert man in der weiteren Folge die spektrale Transmissionsfunktion $T_{\overline{\nu}}$ als

$$T_{\overline{\nu}}(z/\mu) = \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} T_\nu(z/\mu)\,d\nu, \tag{2.68}$$

i. e. als Mittelwert der monochromatischen Transmissionsfunktion T_ν im Wellenzahlband $\Delta\nu$, können (2.66) und (2.67) letztendlich in der Form

$$I_{\overline{\nu}}^{+}(z,\mu) = \varepsilon_{B_{\overline{\nu}}} B_{\overline{\nu}}(0)\,T_{\overline{\nu}}(z/\mu) + \tag{2.69}$$
$$+\int_{z'=0}^{z} B_{\overline{\nu}}(z')\,\frac{dT_{\overline{\nu}}\left[(z-z')/\mu\right]}{dz'}dz',$$

$$I_{\overline{\nu}}^{-}(z,-\mu) = -\int_{z'=z}^{z_\infty} B_{\overline{\nu}}(z')\,\frac{dT_{\overline{\nu}}\left[(z'-z)/\mu\right]}{dz'}dz' \tag{2.70}$$

angeschrieben werden. Wie man man durch Vergleich von (2.69) und (2.70) mit (2.62) und (2.63) erkennt, sind die Radianz $I_\nu^\pm$ und die spektrale Radianz $I_{\overline{\nu}}^\pm$ des Langwellenstrahlungsfeldes durch völlig analog strukturierte Gleichungen gegeben. Der kritische Punkt bei der Lösung von (2.69) und (2.70) ist auf Grund der komplexen Wellenzahlabhängigkeit des spezifischen Absorptionskoeffizienten k_ν zweifelsohne die Kalkulation der spektralen Transmissionsfunktion $T_{\overline{\nu}}$. Hierfür geeignete Methoden werden in Sektion 2.3 diskutiert.

[23] Zur Umrechnung zwischen τ_ν und z siehe (2.49) und (2.50).

2.2.5 Strahlungsflussdichte

Auf die Strahlungsflussdichte des Langwellenstrahlungsfeldes $\mathbf{F}_{\mathrm{LW}}$ wurde bereits zu Beginn dieser Sektion anhand von (2.23) das erste Mal Bezug genommen. In einer plan-parallelen Atmosphäre, wie sie der hiesigen Diskussion zugrunde liegt, gilt für $\mathbf{F}_{\mathrm{LW}}$ die Relation

$$\mathbf{F}_{\mathrm{LW}}(z) = F_{\mathrm{LW}}(z)\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.71}$$

Definiert man nun die Strahlungsflussdichte als Nettoausstrahlung, folgt weiter

$$F_{\mathrm{LW}}(z) = F^{+}_{\mathrm{LW}}(z) - F^{-}_{\mathrm{LW}}(z), \tag{2.72}$$

wobei F^{+}_{LW} für die Ausstrahlung und F^{-}_{LW} für die Einstrahlung des Langwellenstrahlungsfeldes stehen. Der Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung setzt sich aus mehreren schmalen Wellenzahlbändern $(\Delta\nu)_j$ zusammen, woraufhin (2.72) in der Form

$$F_{\mathrm{LW}}(z) = \sum_j F_{(\Delta\nu)_j}(z) = \sum_j \left[F^{+}_{(\Delta\nu)_j}(z) - F^{-}_{(\Delta\nu)_j}(z) \right] \tag{2.73}$$

angeschrieben werden kann. Der Mittelwert der monochromatischen Strahlungsflussdichte F_ν im Wellenzahlband $\Delta\nu$ wird als spektrale Strahlungsflussdichte $F_{\overline{\nu}}$ bezeichnet und ist durch den Ausdruck

$$F_{\overline{\nu}}(z) = \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} F_\nu(z)\,d\nu = \frac{F_{\Delta\nu}(z)}{\Delta\nu} \tag{2.74}$$

gegeben.[24]

Zur Berechnung der spektralen Strahlungsflussdichte $F_{\overline{\nu}}$ muss die Beziehung der monochromatischen Aus- und Einstrahlung zu den Radianzen von (2.62) und (2.63) hergestellt werden. Dies gelingt, wie bereits aus (2.38) hervorgeht, durch Integration von I^{+}_ν beziehungsweise I^{-}_ν über den oberen beziehungsweise unteren Halbraum:

$$\begin{aligned} F^{+}_\nu(\tau_\nu) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi/2} I^{+}_\nu(\tau_\nu, \cos\theta)\cos\theta\sin\theta\, d\theta \;= \\ &= 2\pi \int_{\mu=0}^{1} I^{+}_\nu(\tau_\nu, \mu)\,\mu\, d\mu, \end{aligned} \tag{2.75}$$

[24] Für den Mittelwert der monochromatischen Ausstrahlung F^{+}_ν und den Mittelwert der monochromatischen Einstrahlung F^{-}_ν im Wellenzahlband $\Delta\nu$ gilt natürlich jeweils eine zu (2.74) vollkommen analoge Relation.

$$F_\nu^- (\tau_\nu) = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta^*=0}^{\pi/2} I_\nu^- (\tau_\nu, -\cos\theta^*) \cos\theta^* \sin\theta^* d\theta^* = \tag{2.76}$$
$$= 2\pi \int_{\mu=0}^{1} I_\nu^- (\tau_\nu, -\mu)\, \mu d\mu.$$

In (2.76) wurde $\theta^* = \pi - \theta$ anstatt von θ als Integrationsvariable verwendet, da μ seit (2.53) im Falle der eingestrahlten Radianz als $\mu = |\cos\theta|$ definiert ist. Setzt man (2.62) in (2.75) und (2.63) in (2.76) ein, ergibt sich dann unter Berücksichtigung der Tatsache, dass μ unabhängig von τ_ν ist:

$$F_\nu^+ (\tau_\nu) = \pi\varepsilon_{B_\nu} B_\nu (\tau_{0_\nu}) \cdot 2 \int_{\mu=0}^{1} T_\nu \left[(\tau_{0_\nu} - \tau_\nu) / \mu \right] \mu d\mu - \tag{2.77}$$
$$-\pi \int_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} d\tau'_\nu B_\nu (\tau'_\nu) \frac{d}{d\tau'_\nu} \left\{ 2 \int_{\mu=0}^{1} T_\nu \left[(\tau'_\nu - \tau_\nu) / \mu \right] \mu d\mu \right\},$$

$$F_\nu^- (\tau_\nu) = \pi \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} d\tau'_\nu B_\nu (\tau'_\nu) \frac{d}{d\tau'_\nu} \left\{ 2 \int_{\mu=0}^{1} T_\nu \left[(\tau_\nu - \tau'_\nu) / \mu \right] \mu d\mu \right\}. \tag{2.78}$$

Einer ähnlichen Vorgangsweise wie in der vorhergehenden Subsektion folgend, führt man nun über die Beziehung

$$T_\nu^d (\tau_\nu) = 2 \int_{\mu=0}^{1} T_\nu (\tau_\nu / \mu)\, \mu d\mu \tag{2.79}$$

die diffuse monochromatische Transmissionsfunktion T_ν^d ein, welche als der Mittelwert der monochromatischen Transmissionsfunktion T_ν über den Halbraum zu verstehen ist. Damit können (2.77) und (2.78) schließlich durch

$$F_\nu^+ (\tau_\nu) = \varepsilon_{B_\nu} \pi B_\nu (\tau_{0_\nu})\, T_\nu^d (\tau_{0_\nu} - \tau_\nu) - \tag{2.80}$$
$$- \int_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} \pi B_\nu (\tau'_\nu) \frac{dT_\nu^d (\tau'_\nu - \tau_\nu)}{d\tau'_\nu} d\tau'_\nu,$$

$$F_\nu^- (\tau_\nu) = \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} \pi B_\nu (\tau'_\nu) \frac{dT_\nu^d (\tau_\nu - \tau'_\nu)}{d\tau'_\nu} d\tau'_\nu \tag{2.81}$$

ausgedrückt werden.

Setzt man in (2.79) anhand von (2.60) für die monochromatische Transmissionsfunktion ein, bekommt man:

$$T_\nu^d(\tau_\nu) = 2\int_{\mu=0}^{1} e^{-\tau_\nu/\mu}\mu d\mu. \tag{2.82}$$

Das Intergral auf der rechten Seite von (2.82) lässt sich im Allgemeinen mittels einer Gauß-Quadratur mit vier Stützstellen hinreichend genau berechnen. Eingedenk des erweiterten ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung kann jedoch auch

$$2\int_{\mu=0}^{1} e^{-\tau_\nu/\mu}\mu d\mu = 2e^{-\tau_\nu/\overline{\mu}}\int_{\mu=0}^{1}\mu d\mu = e^{-\tau_\nu/\overline{\mu}} \tag{2.83}$$

geschrieben werden, wobei der Wert von $\overline{\mu}$ zwischen null und eins liegt. Für die Größe $1/\overline{\mu}$, die als der so genannte Diffusivitätsfaktor bezeichnet wird, folgt aus (2.83):

$$\frac{1}{\overline{\mu}}(\tau_\nu) = -\frac{1}{\tau_\nu}\ln\left[2\int_{\mu=0}^{1} e^{-\tau_\nu/\mu}\mu d\mu\right]. \tag{2.84}$$

Durch Vergleich von (2.82) mit (2.83) ergibt sich die diffuse monochromatische Transmissionsfunktion dann letztlich als

$$T_\nu^d(\tau_\nu) = e^{-\tau_\nu/\overline{\mu}(\tau_\nu)} = T_\nu\left(\tau_\nu/\overline{\mu}(\tau_\nu)\right). \tag{2.85}$$

Die Darstellung von T_ν^d in (2.85) ist im Vergleich zu (2.82) auf den ersten Blick rein optisch schöner, da man sich die numerische Integration im Endeffekt ja nicht erspart. Wie aus Abbildung 2.4 hervorgeht, weicht jedoch der Graph von $T_\nu(\tau_\nu/\overline{\mu})$, wenn in jeder optischen Tiefe $1/\overline{\mu} = 1.66$ (i. e. $\overline{\mu} = 0.6$) gesetzt wird, für optische Tiefen kleiner als eins nur geringfügig vom exakten Graphen der diffusen monochromatischen Transmissionsfunktion $T_\nu^d(\tau_\nu)$ ab. Dementsprechend erzielt man in vielen Fällen bei der Berechnung der monochromatischen Aus- und Einstrahlung anhand von (2.80) und (2.81) zufriedenstellende Ergebnisse, indem man einfach die diffuse monochromatische Transmissionsfunktion $T_\nu^d(\tau_\nu)$ durch die monochromatische Transmissionsfunktion $T_\nu(\tau_\nu/\overline{\mu})$, wobei $1/\overline{\mu} = 1.66$

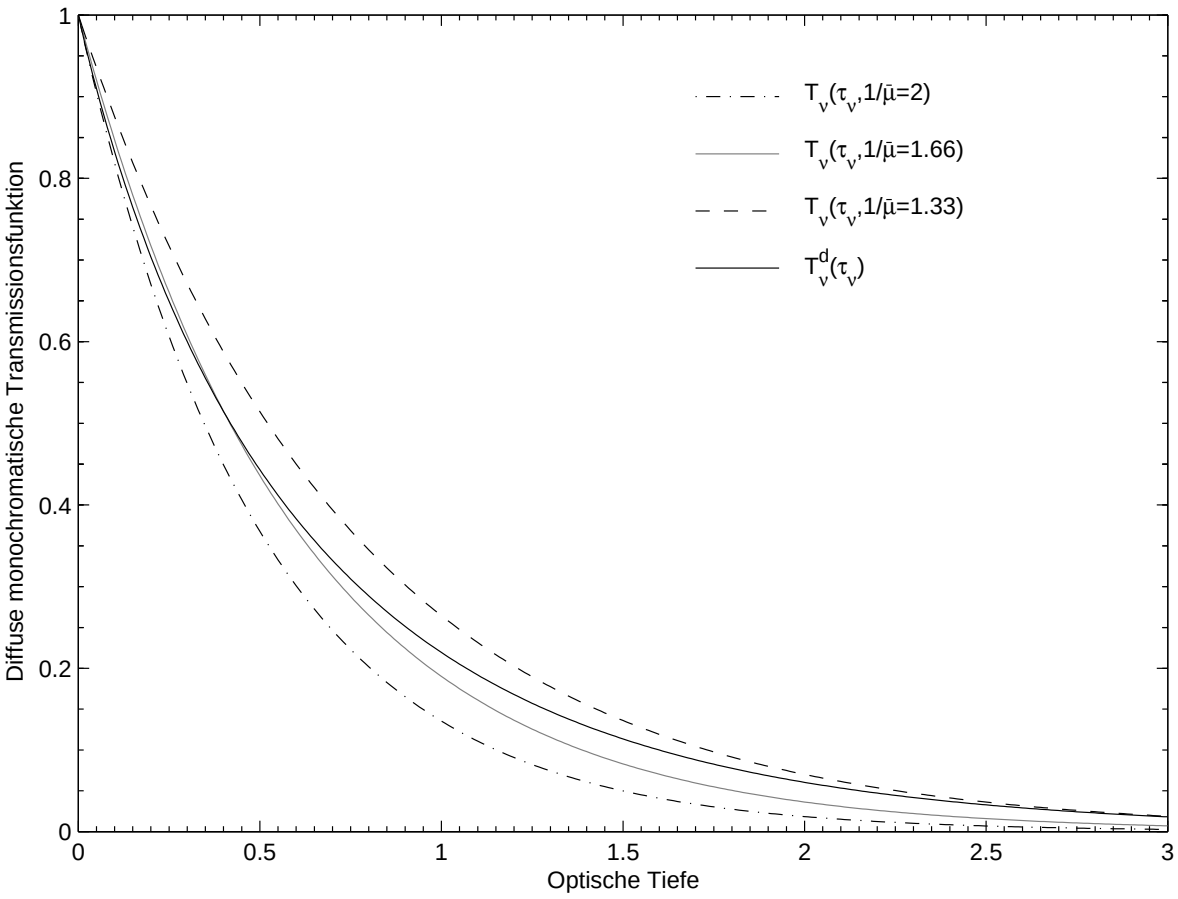


Abbildung 2.4: Die diffuse monochromatische Transmissionsfunktion als Funktion der optischen Tiefe. Die Berechnung von T_ν^d erfolgte einerseits durch numerische Integration (schwarze durchgezogene Linie) und andererseits anhand von drei verschiedenen konstanten Werten für den Diffusivitätsfaktor.

ist, ersetzt. Tut man dies, gehen (2.80) und (2.81) schließlich in

$$F_\nu^+(\tau_\nu) = \varepsilon_{B_\nu}\pi B_\nu(\tau_{0_\nu})\,T_\nu\left[(\tau_{0_\nu}-\tau_\nu)/\overline{\mu}\right] - \int_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} \pi B_\nu(\tau'_\nu)\,\frac{dT_\nu\left[(\tau'_\nu-\tau_\nu)/\overline{\mu}\right]}{d\tau'_\nu}d\tau'_\nu, \tag{2.86}$$

$$F_\nu^-(\tau_\nu) = \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} \pi B_\nu(\tau'_\nu)\,\frac{dT_\nu\left[(\tau_\nu-\tau'_\nu)/\overline{\mu}\right]}{d\tau'_\nu}d\tau'_\nu \tag{2.87}$$

über.

Wie man durch Vergleich von (2.86) und (2.87) mit (2.62) und (2.63) erkennt, gelten weiters die Beziehungen

$$F_\nu^+(\tau_\nu) = \pi I_\nu^+(\tau_\nu, \overline{\mu}), \tag{2.88}$$
$$F_\nu^-(\tau_\nu) = \pi I_\nu^-(\tau_\nu, -\overline{\mu}). \tag{2.89}$$

Die spektrale Ausstrahlung $F_{\overline{\nu}}^+$ und die spektrale Einstrahlung $F_{\overline{\nu}}^-$ erhält man damit sofort aus (2.69) und (2.70) als

$$F_{\overline{\nu}}^+(z) = \varepsilon_{B\overline{\nu}} \pi B_{\overline{\nu}}(0)\, T_{\overline{\nu}}(z/\overline{\mu}) + \int_{z'=0}^{z} \pi B_{\overline{\nu}}(z')\, \frac{dT_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz'} dz', \tag{2.90}$$

$$F_{\overline{\nu}}^-(z) = -\int_{z'=z}^{z_\infty} \pi B_{\overline{\nu}}(z')\, \frac{dT_{\overline{\nu}}[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz'} dz'. \tag{2.91}$$

Das Einzige, was jetzt noch fehlt, ist ein Ausdruck für die spektrale Strahlungsflussdichte $F_{\overline{\nu}}$ aus (2.74). Um einen solchen abzuleiten, braucht natürlich nur mehr (2.91) von (2.90) abgezogen werden:

$$F_{\overline{\nu}}(z) = \varepsilon_{B\overline{\nu}} \pi B_{\overline{\nu}}(0)\, T_{\overline{\nu}}(z/\overline{\mu}) + \int_{z'=0}^{z_\infty} \pi B_{\overline{\nu}}(z')\, \frac{dT_{\overline{\nu}}(|z-z'|/\overline{\mu})}{dz'} dz'. \tag{2.92}$$

Dabei wurde beachtet, dass, wie aus (2.50), (2.60) und (2.68) hervorgeht,

$$T_{\overline{\nu}}\left[(z'-z)/\overline{\mu}\right] = T_{\overline{\nu}}\left(|z-z'|/\overline{\mu}\right) \tag{2.93}$$

ist.

2.2.6 Radiative Temperaturänderungsrate

Die radiative Temperaturänderungsrate des Langwellenstrahlungsfeldes $(\partial T/\partial t)_{\mathrm{LW}}$ wurde zu Beginn dieser Sektion in (2.28) eingeführt. Da die Langwellensrahlungsflussdichte $\mathbf{F}_{\mathrm{LW}}$ in einer plan-parallelen Atmosphäre nur eine Komponente in vertikaler Richtung aufweist (siehe (2.71)), ist $(\partial T/\partial t)_{\mathrm{LW}}$ folglich durch

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}(z)\right)_{\mathrm{LW}} = -\frac{1}{c_p \rho(z)} \frac{dF_{\mathrm{LW}}(z)}{dz} \tag{2.94}$$

gegeben. Mit (2.73) und (2.74) gilt weiters:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}(z)\right)_{\mathrm{LW}} = -\frac{1}{c_p \rho(z)} \sum_j \frac{dF_{\overline{\nu}_j}(z)}{dz} (\Delta\nu)_j = \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial t}(z)\right)_{(\Delta\nu)_j}. \tag{2.95}$$

Zieht man (2.92) hinzu, bekommt man für die mit einem schmalen Wellenzahlband $\Delta\nu$ verknüpfte radiative Temperaturänderungsrate $(\partial T/\partial t)_{\Delta\nu}$ dann den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}(z)\right)_{\Delta\nu} = -\frac{\Delta\nu}{c_p\rho(z)}\left\{\varepsilon_{B\overline{\nu}}\pi B_{\overline{\nu}}(0)\frac{dT_{\overline{\nu}}(z/\overline{\mu})}{dz} + \right. \tag{2.96}$$
$$\left. + \int_{z'=0}^{z_\infty} \pi B_{\overline{\nu}}(z')\frac{d^2T_{\overline{\nu}}(|z-z'|/\overline{\mu})}{dz'dz}dz'\right\}.$$

$(\partial T/\partial t)_{\Delta\nu}$ lässt sich jedoch auch noch in einer anderen, anschaulicheren Weise darstellen. Damit dies gelingt, schreibt man zunächst:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}(z)\right)_{\Delta\nu} = -\frac{\Delta\nu}{c_p\rho(z)}\left[\frac{dF^+_{\overline{\nu}}(z)}{dz} - \frac{dF^-_{\overline{\nu}}(z)}{dz}\right]. \tag{2.97}$$

Die Ableitungen von $F^+_{\overline{\nu}}$ und $F^-_{\overline{\nu}}$ nach z ergeben sich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass

$$\left.\frac{dT_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz'}\right|_{z'=z} = -\left.\frac{dT_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz}\right|_{z'=z} \tag{2.98}$$

gilt,[25] aus (2.90) und (2.91) als

$$\frac{dF^+_{\overline{\nu}}(z)}{dz} = \varepsilon_{B\overline{\nu}}\pi B_{\overline{\nu}}(0)\frac{dT_{\overline{\nu}}(z/\overline{\mu})}{dz} + \tag{2.99}$$
$$+ \int_{z'=0}^{z} \pi B_{\overline{\nu}}(z')\frac{d^2T_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz'dz}dz' - \pi B_{\overline{\nu}}(z)\left.\frac{dT_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz}\right|_{z'=z},$$

$$\frac{dF^-_{\overline{\nu}}(z)}{dz} = -\int_{z'=z}^{z_\infty} \pi B_{\overline{\nu}}(z')\frac{dT^2_{\overline{\nu}}[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz'dz}dz' - \tag{2.100}$$
$$-\pi B_{\overline{\nu}}(z)\left.\frac{dT_{\overline{\nu}}[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz}\right|_{z'=z}.$$

Des Weiteren werden nun folgende zwei Beziehungen gebraucht:

$$\int_{z'=0}^{z} \pi B_{\overline{\nu}}(z)\frac{d^2T_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz'dz}dz' = \tag{2.101}$$
$$= \pi B_{\overline{\nu}}(z)\left.\frac{dT_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz}\right|_{z'=z} - \pi B_{\overline{\nu}}(z)\left.\frac{dT_{\overline{\nu}}[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz}\right|_{z'=0},$$

[25] Siehe dazu (2.50), (2.60) und (2.68).

$$\int_{z'=z}^{z_\infty} \pi B_\nu(z) \frac{d^2 T_\nu[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz'dz} dz' = \tag{2.102}$$
$$= \pi B_\nu(z) \frac{dT_\nu[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz}\bigg|_{z'=z_\infty} - \pi B_\nu(z) \frac{dT_\nu[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz}\bigg|_{z'=z}.$$

Setzt man (2.101) und (2.102) in (2.99) und (2.100) ein, erhält man für die Ableitungen von F_ν^+ und F_ν^- nach z schließlich:

$$\frac{dF_\nu^+(z)}{dz} = \pi\left[\varepsilon_{B_\nu} B_\nu(0) - B_\nu(z)\right] \frac{dT_\nu(z/\overline{\mu})}{dz} + \tag{2.103}$$
$$+ \int_{z'=0}^{z} \pi\left[B_\nu(z') - B_\nu(z)\right] \frac{d^2 T_\nu[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz'dz} dz',$$
$$\frac{dF_\nu^-(z)}{dz} = -\pi B_\nu(z) \frac{dT_\nu[(z_\infty - z)/\overline{\mu}]}{dz} - \tag{2.104}$$
$$- \int_{z'=z}^{z_\infty} \pi\left[B_\nu(z') - B_\nu(z)\right] \frac{dT_\nu^2[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz'dz} dz'.$$

Mit diesen beiden Gleichungen folgt letzten Endes für die radiative Temperaturänderungsrate $(\partial T/\partial t)_{\Delta\nu}$ aus (2.97):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}(z)\right)_{\Delta\nu} = -\frac{\Delta\nu}{c_p \rho(z)} \Bigg\{ \pi B_\nu(z) \frac{dT_\nu[(z_\infty - z)/\overline{\mu}]}{dz} + \tag{2.105}$$
$$+\pi\left[\varepsilon_{B_\nu} B_\nu(0) - B_\nu(z)\right] \frac{dT_\nu(z/\overline{\mu})}{dz} +$$
$$+ \int_{z'=0}^{z} \pi\left[B_\nu(z') - B_\nu(z)\right] \frac{d^2 T_\nu[(z-z')/\overline{\mu}]}{dz'dz} dz' +$$
$$+ \int_{z'=z}^{z_\infty} \pi\left[B_\nu(z') - B_\nu(z)\right] \frac{dT_\nu^2[(z'-z)/\overline{\mu}]}{dz'dz} dz' \Bigg\}.$$

(2.105) liefert die Erkenntnis, dass $(\partial T/\partial t)_{\Delta\nu}$ sich aus insgesamt vier verschiedenen Teiländerungsraten zusammensetzen lässt. Die erste Teiländerungsrate in (2.105)[26] hängt über $B_\nu(z)$ von der Temperatur $T(z)$ ab und ist mit dem Energieaustausch zwischen dem Level z und dem interplanetaren Raum verknüpft. Sie ist stets negativ, da, wie im Zuge der Auswertung von (2.50), (2.60) und (2.68) leicht

[26] Jede der vier Teiländerungsraten umfasst natürlich auch den negativen Vorfaktor $-\Delta\nu/c_p\rho$.

ersichtlich wird, $dT_{\overline{\nu}}\left[\left(z_{\infty}-z\right)/\overline{\mu}\right]/dz>0$ gilt. Demzufolge bezeichnet man den ersten Term auf der rechten Seite von (2.105) auch als Cooling-to-Space-Term. Im Rahmen der so genannten Cooling-to-Space-Approximation wird nur dieser Term bei der Berechnung von $\left(\partial T/\partial t\right)_{\Delta\nu}$ berücksichtigt. Obwohl sie im Grunde sehr einfach ist, führt die Cooling-to-Space-Approximation in der mittleren Atmosphäre nicht selten zu überraschend genauen Werten für $\left(\partial T/\partial t\right)_{\Delta\nu}$. Die zweite Teiländerungsrate in (2.105) bezieht sich auf den Energieaustausch zwischen dem Level z und dem Erdboden. Sofern $T\left(0\right)>T\left(z\right)$ ist, i. e. die Temperatur am Erdboden die Temparatur am Level z übersteigt, weist diese wegen $dT_{\overline{\nu}}\left(z/\overline{\mu}\right)/dz<0$ konsequenterweise einen Wert größer als null auf. Die zwei übrigen Teiländerungsraten in (2.105) repräsentieren die Wechselwirkung zwischen dem Level z und den darunter beziehungsweise darüber liegenden Levels z'. Unter der Annahme, dass $T\left(z'\right)>T\left(z\right)$ gilt, sind diese wegen $d^2T_{\overline{\nu}}\left[\left(z-z'\right)/\overline{\mu}\right]/dz'dz<0$ beziehungsweise $d^2T_{\overline{\nu}}\left[\left(z'-z\right)/\overline{\mu}\right]/dz'dz<0$ erwartungsgemäß beide positiv.

2.3 Die Methode der korrelierten k-Verteilung

2.3.1 Linienabsorption

Am Ende von Subsektion 2.2.4 wurde bereits darauf hingewiesen, dass der kritische Punkt bei der Berechnung der ein- und ausgestrahlten spektralen Radianz[27] von (2.69) und (2.70) die Kalkulation der spektralen Transmissionsfunktion ist. Eine ihrer Schreibweisen lautet zufolge von (2.50), (2.60) und (2.68):

$$T_{\overline{\nu}}\left(z/\mu\right)=\frac{1}{\Delta\nu}\int\limits_{\Delta\nu}\exp\left[-\frac{1}{\mu}\int\limits_{z'=0}^{z}k_{\nu}\left(z'\right)\rho_a\left(z'\right)dz'\right]d\nu. \tag{2.106}$$

Mit der Relation

$$u_a\left(z\right)=\int\limits_{z'=0}^{z}\rho_a\left(z'\right)dz', \tag{2.107}$$

wobei u_a die Säulendichte des infrarotaktiven Atmosphärenbestandteils bezeichnet, der im betrachteten schmalen Wellenzahlband wirksam ist, bekommt man für die spektrale Transmissionsfunktion weiters den Ausdruck

$$T_{\overline{\nu}}\left(u_a/\mu\right)=\frac{1}{\Delta\nu}\int\limits_{\Delta\nu}\exp\left[-\frac{1}{\mu}\int\limits_{u'_a=0}^{u_a}k_{\nu}\left(u'_a\right)du'_a\right]d\nu. \tag{2.108}$$

[27] Dasselbe gilt in der weiteren Folge natürlich auch für die spektrale Strahlungsflussdichte aus (2.92).

Wie aus Abbildung 2.5 deutlich hervorgeht, beruht die Schwierigkeit bei der Durchführung der ν-Integration in (2.106) beziehungsweise in (2.108) auf der komplexen Wellenzahlabhängigkeit des spezifischen Absorptionskoeffizienten k_ν. Während nämlich die Strahlungsabsorption durch den Erdboden im Prinzip kontinuierlich erfolgt, findet in der Atmosphäre vorwiegend Linienabsorption statt.[28] Der spezifische Absorptionskoeffizient $k_{\nu,i}$, der mit einer einzelnen Spektrallinie des betrachteten Infrarotabsorbers verknüpft ist, kann dabei –mit der Linienstärke S_i und der Linienformfunktion $f_{\nu,i}$– in der Form

$$k_{\nu,i}(p,T) = S_i(T)\, f_{\nu,i}(p,T) \tag{2.109}$$

angeschrieben werden (siehe zum Beispiel [7]). Wie aus (2.109) ersichtlich wird, hängt die Linienformfunktion sowohl von der Wellenzahl als auch vom Druck und der Temperatur ab, wohingegen die Linienstärke nur eine Funktion der Temperatur ist. Für die Linienformfunktion gilt weiters die Normierung

$$\int_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu,i}\, d\nu = 1, \tag{2.110}$$

woraufhin die Linienstärke sich, wie durch entsprechende Integration von (2.109) folgt, durch

$$S_i = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} k_{\nu,i}\, d\nu \tag{2.111}$$

definieren lässt. Die Temperaturabhängigkeit der Linienstärke ist, wie in der Quantenmechanik gezeigt wird (siehe zum Beispiel [8]), mit ausreichender Genauigkeit durch

$$S_i(T) = S_i^{(0)} \left(\frac{T_0}{T}\right)^n \exp\left[-\frac{hcE_i}{k}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)\right] \tag{2.112}$$

gegeben, wobei E_i die Summe von elektronischer, Rotations- und Vibrationsenergie des Infrarotabsorbers im unteren Energiezustand des mit der betrachteten Spektrallinie assoziierten Strahlungsübergangs ist und $S_i^{(0)} = S_i(T_0)$ die Linienstärke bei einer Referenztemperatur T_0 repräsentiert. Der Index n in (2.112) hat einen Wert von 2 für lineare Moleküle wie zum Beispiel CO_2 und einen Wert von 2.5 für nicht-lineare Moleküle wie zum Beispiel H_2O. Zur Verfügung gestellt werden konkrete Werte von spektroskopischen Parametern wie E_i und $S_i^{(0)}$ beispielsweise über die HITRAN-Datenbank (siehe [14]). Die Referenztemperatur T_0 beträgt dabei 296 K.

[28] Näheres dazu siehe Sektion 3.2.

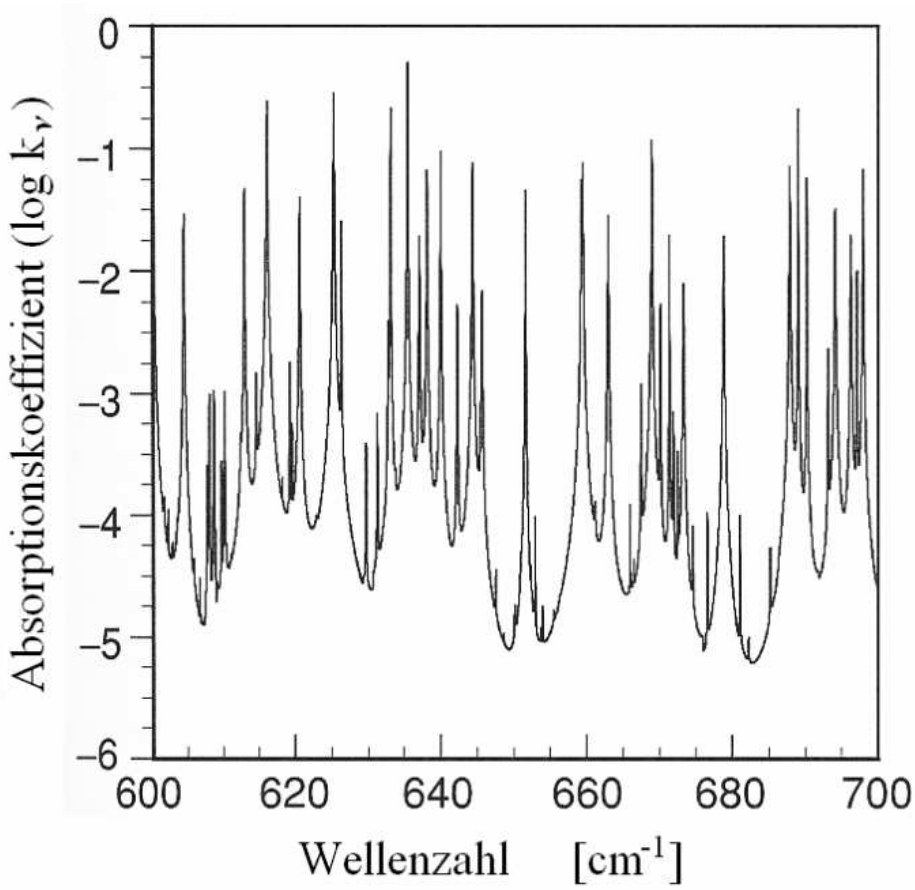


Abbildung 2.5: Der spezifische Absorptionskoeffizient (in der Einheit $\mathrm{cm}^{-1}/\mathrm{atm}$) als Funktion der Wellenzahl in einem Ausschnitt des Rotationsbandes von H_2O bei $p = 600$ mb und $T = 260$ K. Die spektrale Auflösung beträgt 0.01 cm^{-1} (übernommen aus [7]).

Dass die mit einer einzelnen Spektrallinie verknüpfte Absorption nicht monochromatisch erfolgt, sondern einen ganzen Wellenzahlbereich um das Linienzentrum umfasst,[29] ist in der so genannten Linienverbreiterung begründet. Diese basiert im Prinzip auf zwei differenten Effekten, nämlich dem Druckeffekt und dem Dopplereffekt. Die Druckverbreiterung auf der einen Seite ergibt sich dadurch, dass ein infrarotaktives Molekül im Atmosphärengas ständig mit anderen Molekülen derselben Sorte wie auch mit Molekülen aller übrigen Sorten zusammenstößt. Diese Kollisionen, die natürlich umso häufiger stattfinden, je größer der Druck ist, wirken sich primär in der Zerstörung der Phasenkohärenz des absorbier-

[29] Formal entspricht dieser Wellenzahlbereich sogar dem gesamten ν-Raum

ten Wellenzuges aus. Demgemäß findet die Absorption durch ein infrarotaktives Molekül unmittelbar nach einem Zusammenstoß bei einer Wellenzahl statt, die von derjenigen, bei der es im ungestörten Zustand absorbiert, mehr oder weniger abweicht. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die stoßfreie Zeit, i. e. die Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kollisionen eines infrarotaktiven Moleküls mit anderen Molekülen verstreicht, durch eine Poisson-Verteilung gegeben ist, erhält man für die Formfunktion einer Druck-verbreiterten Spektrallinie letztendlich (siehe zum Beispiel [7]):

$$f_L(\nu-\nu_0) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha_L}{\left[(\nu-\nu_0)^2+\alpha_L^2\right]}. \tag{2.113}$$

Die durch $f_L(\nu-\nu_0)$[30] definierte Linienform bezeichnet man als Lorentz-Linienform. ν_0 entspricht der Wellenzahl, bei der das Linienzentrum liegt, und α_L der Halbwertsbreite der Linie.[31] Für Letztere gilt –mit einer Referenzhalbwertsbreite $\alpha_L^{(0)} = \alpha_L(p_0, T_0)$– die Beziehung

$$\alpha_L(p,T) = \alpha_L^{(0)}\left(\frac{p}{p_0}\right)\left(\frac{T_0}{T}\right)^n. \tag{2.114}$$

Der Referenzdruck p_0 und die Referenztemperatur T_0 betragen in der HITRAN-Datenbank 1013.25 mb und –wie schon erwähnt– 296 K. Der Index n wiederum weist von Infrarotabsorber zu Infrarotabsorber differierende Werte zwischen 0.5 und 1 auf.

Die Dopplerverbreiterung auf der anderen Seite beruht auf der Tatsache, dass die Wellenzahl ν, bei der ein infrarotaktives Molekül mit beliebiger thermischer Geschwindigkeit vom Standpunkt eines im Ruhesystem der Atmosphäre befindlichen Beobachters absorbiert, gegenüber der Wellenzahl ν_0, bei der aus der Sicht eines mit dem Molekül mitbewegten Beobachters Absorption stets stattfindet, verschoben ist. Da die Komponente der thermischen Teilchengeschwindigkeit in der Sichtrichtung eines im Bezugssystem der Atmosphäre ruhenden Beobachters einer Maxwell-Verteilung gehorcht, folgt für die Formfunktion einer Dopplerverbreiterten Spektrallinie schließlich (siehe zum Beispiel [7])

$$f_D(\nu-\nu_0) = \frac{1}{\alpha_D\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\alpha_D}\right)^2\right], \tag{2.115}$$

wobei α_D –mit der Masse m des betrachteten Infrarotabsorbers– durch

$$\alpha_D(T) = \nu_0\sqrt{\frac{2kT}{mc^2}} \tag{2.116}$$

[30] Der Index i wurde der Einfachheit halber weggelassen.

[31] Die Halbwertsbreite einer Spektrallinie ist derjenige Wellenzahlabstand vom Linienzentrum, bei dem der Wert der Linienformfunktion nur mehr die Hälfte des Amplitudenwertes beträgt.

gegeben ist. Die Halbwertsbreite einer Doppler-verbreiterten Spektrallinie ist, wie man leicht einsieht, gleich $\alpha_D\sqrt{\ln 2}$.

Druckverbreiterung und Dopplerverbreiterung einer Spektrallinie finden simultan statt und dürfen daher bei realistischen atmosphärischen Bedingungen grundsätzlich nicht getrennt voneinander betrachtet werden. Zumal gemäß (2.114) $\alpha_L \propto p$ gilt und der Druck sich durch eine weit stärkere Höhenabhängigkeit auszeichnet als die Temperatur, ist jedoch einsichtig, dass in der Troposphäre die Druckverbreiterung und in der Mesosphäre die Dopplerverbreiterung dominiert. Demzufolge kann bei der Kalkulation der spektralen Transmissionsfunktion T_ν von (2.106) und (2.108) bis in eine Höhe von rund 20 km die Lorentz-Linienform und ab einer Höhe von etwa 50 km die Doppler-Linienform verwendet werden. Im dazwischen liegenden Höhenbereich der unteren und mittleren Atmosphäre muss dem Zusammenspiel zwischen Druck- und Dopplereffekt indessen unbedingt Rechnung getragen werden. Tut man dies, gelangt man mittels der entsprechenden Faltung von $f_D(\nu-\nu_0)$ mit $f_L(\nu-\nu_0)$ zur so genannten Voigt-Linienform:

$$\begin{aligned} f_V(\nu-\nu_0) &= \int\limits_{\nu'-\nu_0=-\infty}^{\infty} f_L(\nu'-\nu_0)\, f_D(\nu-\nu')\, d(\nu'-\nu_0) = \qquad (2.117)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\frac{\alpha_L}{\alpha_D}\int\limits_{\nu'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[(\nu'-\nu_0)^2+\alpha_L^2\right]} \exp\left[-\left(\frac{\nu-\nu'}{\alpha_D}\right)^2\right] d\nu'. \end{aligned}$$

Schreibt man $\nu-\nu' = \alpha_D t$ und $\nu-\nu_0 = \alpha_D x$, vereinfacht sich (2.117) zu

$$f_V(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\frac{\alpha_L}{\alpha_D^2}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left[(x-t)^2+(\alpha_L/\alpha_D)^2\right]}. \qquad (2.118)$$

Durch Einführung des Parameters $y = \alpha_L/\alpha_D$ und Definition der Voigt-Funktion $K_y(x)$ als

$$K_y(x) = \frac{y}{\pi}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left[(x-t)^2+y^2\right]} \qquad (2.119)$$

bekommt man für die Linienformfunktion $f_V(\nu-\nu_0)$, welche die allgemeine Form einer Spektrallinie in der Atmosphäre repräsentiert, schließlich den Ausdruck

$$f_V(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha_D} K_y(x). \qquad (2.120)$$

Eine Illustration der drei atmosphärischen Linienformen liefert Abbildung 2.6. Gezeigt sind eine Druck-verbreiterte und eine Doppler-verbreiterte Linie mit derselben Halbwertsbreite sowie die analoge Voigt-Linie.

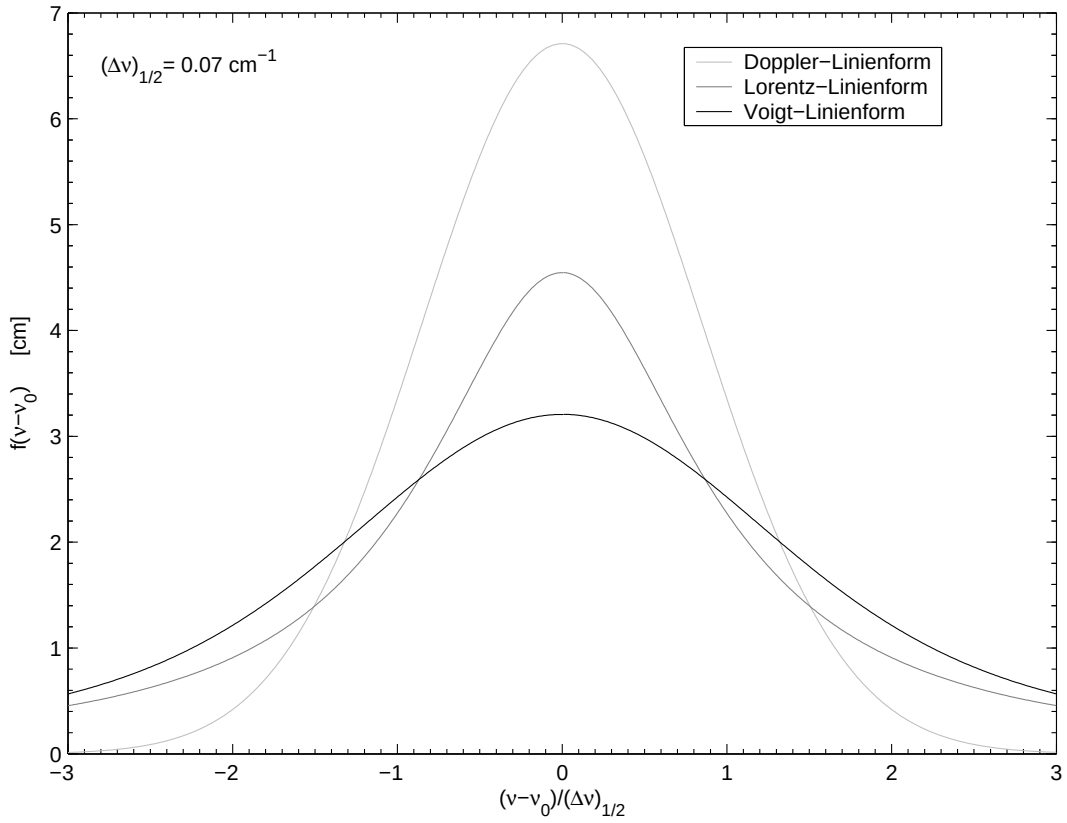


Abbildung 2.6: Doppler-Linienform, Lorentz-Linienform und Voigt-Linienform im Vergleich. Die Halbwertsbreite $(\Delta\nu)_{1/2}$ beträgt für die Druck-verbreiterte und die Doppler-verbreiterte Linie 0.07 cm^{-1}. Ein solcher Wert ist typisch für die Spektrallinien von CO_2 unter den Referenzbedingungen, die in (2.114) definiert wurden.

Mit der Voigt-Linienform ergibt sich nun für den mit einer einzelnen Spektrallinie verknüpften spezifischen Absorptionskoeffizient $k_{\nu,i}$ aus (2.109):

$$k_{\nu,i}(p,T) = S_i(T)\, f_V\big(\nu - \nu_{0,i}, \alpha_{L,i}(p,T), \alpha_{D,i}(T)\big). \tag{2.121}$$

Die Berechnung des totalen spezifischen Absorptionskoeffizienten k_ν erfordert verständlicherweise die Aufsummierung über die Beiträge aller im Wellenzahlband $\Delta\nu$ relevanten Spektrallinien des betrachteten Infrarotabsorbers:

$$k_\nu(p,T) = \sum_i S_i(T)\, f_V\big(\nu - \nu_{0,i}, \alpha_{L,i}(p,T), \alpha_{D,i}(T)\big). \tag{2.122}$$

Setzt man (2.122) in (2.108) ein, erhält man die spektrale Transmissionsfunktion

$T_{\overline{\nu}}$ schließlich als

$$T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) =$$

$$= \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int_{u'_a=0}^{u_a} du'_a \sum_i S_i\left(u'_a\right) f_V\left(\nu-\nu_{0,i},\alpha_{L,i}\left(u'_a\right),\alpha_{D,i}\left(u'_a\right)\right)\right] d\nu. \tag{2.123}$$

Indem man die Integrale in finite Summen übergehen lässt, kann natürlich anhand von

$$T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) = \frac{1}{\Delta\nu}\sum_k \exp\left[-\frac{1}{\mu}\sum_j\sum_i S_{ij} f_V\left(\nu_k-\nu_{0,i},\alpha_{L,ij},\alpha_{D,ij}\right)\left(\Delta u_a\right)_j\right](\Delta\nu)_k \tag{2.124}$$

theoretisch eine numerische Lösung von (2.123) gewonnen werden. Ruft man sich an dieser Stelle Abbildung 2.5 in Erinnerung, wird jedoch zweifellos klar, dass im Besonderen die Diskretisierung im ν-Raum nicht unproblematisch ist. Denn die Auswertung von (2.124) liefert nur dann brauchbare Resultate für die spektrale Transmissionsfunktion, wenn die $(\Delta\nu)_k$ so klein gewählt werden, dass individuelle Spektrallinien aufgelöst werden. Damit dies gewährleistet ist, müssen die $(\Delta\nu)_k$ aber allesamt kleiner als die Halbwertsbreiten der Spektrallinien im betrachteten Wellenzahlband sein. Die Halbwertsbreiten der Wasserdampflinien beispielsweise weisen in der Troposphäre, wo Absorption und Emission durch Wasserdampf von zentraler Bedeutung sind, durchwegs Werte zwischen 0.01 cm^{-1} und 0.1 cm^{-1} auf. Betrachtet man den gesamten von Wasserdampflinien bevölkerten Wellenzahlbereich, i. e. den Wellenzahlbereich zwischen 10 und 15 000 cm^{-1}, benötigt man deswegen mehr als 1 Million Punkte im ν-Raum, um einzelne Linien aufzulösen. Wenn man daran denkt, dass jeder Punkt im ν-Raum mit zahlreichen Spektrallinien und atmosphärischen Bedingungen verknüpft ist und die spektrale Transmissionsfunktion für mehrere schmale Wellenzahlbänder berechnet werden muss, ist leicht einzusehen, dass exakte Line-by-Line-Kalkulationen anhand von (2.124) selbst bei der Verwendung von Supercomputern mit einer beträchtlichen Rechenzeit einhergehen. Allen bezüglich des Langwellenstrahlungstransfers entwickelten Theorien wohnt infolgedessen die Grundabsicht inne, die Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion durch Umgehung der direkten Integration über das Wellenzahlband und den Höhenbereich zu vereinfachen. Vom Grad, bis zu dem die Minimierung des Rechenaufwandes unter Beibehaltung ausreichender Genauigkeit vorangetrieben werden kann, hängt dann letztendlich der Erfolg ab, mit dem Langwellenstrahlungstransferkalkulationen in Klima- und Wettermodellen implementiert werden können. Sehr elegant lässt sich die Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion anhand der Methode der korrelierten

k-Verteilung ökonomisieren. Darauf soll in der weiteren Folge etwas näher eingegangen werden.

2.3.2 Die Methode der k-Verteilung

Betrachtet man eine Atmosphärenschicht der Dicke z, in der die Höhenabhängigkeit von Druck und Temperatur vernachlässigt werden kann, was zur Folge hat, dass der spezifische Absorptionskoeffizient als homogen aufgefasst werden darf, folgt für die spektrale Transmissionsfunktion $T_{\bar{\nu}}$ von (2.108):

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = \int_{\Delta\nu} e^{-k_\nu u_a/\mu} \frac{d\nu}{\Delta\nu}. \tag{2.125}$$

Wie leicht einzusehen ist, ist der Wert des Integrals auf der rechten Seite von (2.125) unabhängig davon, wie die infinitesimalen Beiträge zur spektralen Transmissionsfunktion im Wellenzahlband $\Delta\nu$ angeordnet sind. Reiht man diese der Größe nach aneinander, und zwar beginnend mit dem größten Beitrag (i. e. mit dem kleinsten Wert von k_ν), kann die Integration im ν-Raum, sobald die Definition einer entsprechenden Verteilungsfunktion $f(k)$ für k_ν erfolgt ist, durch eine Integration im k-Raum ersetzt werden (siehe zum Beispiel [7]). Indem man $f(k)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte auffasst, was sich in der Normierungsbedingung

$$\int_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} f(k)\,dk = 1 \tag{2.126}$$

widerspiegelt, wird (2.125) im Zuge der Transformation in den k-Raum zu

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = \int_{k=0}^{\infty} e^{-ku_a/\mu} f(k)\,dk. \tag{2.127}$$

Dabei wurde der Integrationsbereich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $f(k)$ für $k < k_{\min}$ und $k > k_{\max}$ verschwindet, auf den gesamten k-Raum ausgedehnt. Wie aus (2.127) ersichtlich wird, ist die spektrale Transmissionsfunktion nichts anderes als die Laplace-Transformierte von $f(k)$. Wenn man einen analytischen Ausdruck für die spektrale Transmissionsfunktion kennt, kann damit umgekehrt $f(k)$ aus $T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu)$ durch inverse Laplace-Transformation bestimmt werden:

$$f(k) = L^{-1}\left(T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu)\right). \tag{2.128}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der spezifische Absorptionskoeffizient im Wellenzahlband $\Delta\nu$ einen Wert kleinergleich k aufweist, ist durch

$$g(k) = \int_{k'=0}^{k} f\left(k'\right) dk' \tag{2.129}$$

gegeben. $g(k)$ bezeichnet man dabei als kumulative Wahrscheinlichkeitsfunktion. Unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung aus (2.126) folgt natürlich sofort, dass $g(k)$ die Ungleichung $0 \leq g(k) \leq 1$ erfüllt. Substituiert man in (2.127) $g(k)$ für k, lässt sich die spektrale Transmissionsfunktion dann in folgender alternativer Form anschreiben:

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = \int_{g=0}^{1} e^{-k(g)u_a/\mu} dg. \tag{2.130}$$

Der Übergang vom Integral zu einer finiten Summe führt letztendlich zu

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = \sum_i e^{-k(g_i)u_a/\mu} (\Delta g)_i . \tag{2.131}$$

Wie durch Vergleich von (2.131) und (2.124) hervorgeht, erfolgt die numerische Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion auf jeden Fall durch Aufsummieren von Exponentialtermen. Die Verwendung von (2.131) hat jedoch einen entscheidenden Vorteil. Ganz im Gegensatz zu k_ν ist $g(k)$ nämlich per definitionem eine glatte, monoton steigende Funktion. Dies trifft natürlich auch für die Umkehrfunktion $k(g)$ zu, womit klar wird, dass bei der Auswertung von (2.131) wenige Quadraturpunkte ausreichen, um genauso exakte Ergebnisse zu erzielen wie bei der Durchführung von Line-by-Line-Kalkulationen. An dieser Stelle muss aber unbedingt darauf hingewiesen werden, dass die Methode der k-Verteilung, wie sie in dieser Subsektion diskutiert wird, zunächst lediglich im Falle einer homogenen Atmosphärenschicht anwendbar ist.

Bevor (2.131) konkret zur Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion herangezogen werden kann, muss natürlich noch die Frage geklärt werden, wie man von den Liniendaten im Wellenzahlband $\Delta\nu$ zur Verteilungsfunktion $f(k)$ für den spezifischen Absorptionskoeffizient und in der weiteren Folge zur kumulativen Wahrscheinlichkeitsfunktion $g(k)$ gelangt. Davon ausgehend, dass k_ν mit einer hinreichend kleinen spektralen Auflösung für den gegebenen Atmosphärenzustand berechnet wurde,[32] teilt man $\Delta\nu$ hierzu in N Subintervalle $(\Delta\nu)_j$ ein, und zwar dergestalt, dass sich jedes $(\Delta\nu)_j$ von einem Minimum zu einem Maximum von k_ν erstreckt (siehe zum Beispiel [8]). Infolgedessen ist in jedem Subintervall sowohl k_ν als auch die Inverse $\nu(k)$, die sich per se durch eine enorme Vieldeutigkeit auszeichnet, eine monotone Funktion. Wie durch Gegenüberstellung von (2.125) und (2.127) hervorgeht, ergibt sich der Beitrag des j-ten Subintervalls zu $f(k)$ als

$$f_j(k) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\nu} \left| \frac{d\nu_j(k)}{dk} \right|, & k_{\min,j} \leq k \leq k_{\max,j} \\ 0, & k < k_{\min,j},\ k > k_{\max,j} \end{cases}, \tag{2.132}$$

[32] Siehe dazu (2.112), (2.114), (2.116), (2.120) und (2.122).

wobei $\nu_j(k)$ für $\nu_{\min,j} \leq \nu \leq \nu_{\max,j}$ gleich $\nu(k)$ und sonst null ist und die Betragsstriche gesetzt werden müssen, da $f_j(k)$ definitionsgemäß nur positive Werte annehmen darf. $f(k)$ kann in der weiteren Folge aus (2.132) durch Aufsummieren über die Beiträge aller Subintervalle gewonnen werden. Definiert man zu diesem Zweck die Stufenfunktion $h(t)$ in der Form

$$h(t) = \begin{cases} h(t) = 1, & t \geq 0 \\ h(t) = 0, & t < 0 \end{cases}, \tag{2.133}$$

bekommt man schließlich:

$$f(k) = \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{d\nu_j(k)}{dk} \right| \left[h\left(k - k_{\min,j}\right) - h\left(k - k_{\max,j}\right) \right]. \tag{2.134}$$

Einsetzen von (2.134) in (2.129) führt nun zu

$$g(k) = \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{j=1}^{N} \int_{k'=0}^{k} \left| \frac{d\nu_j(k')}{dk'} \right| \left[h\left(k' - k_{\min,j}\right) - h\left(k' - k_{\max,j}\right) \right] dk'. \tag{2.135}$$

Für $k_{\min,j} \leq k \leq k_{\max,j}$ beziehungsweise $k > k_{\max,j}$ folgt

$$\int_{k'=0}^{k} \left| \frac{d\nu_j(k')}{dk'} \right| \left[h\left(k' - k_{\min,j}\right) - h\left(k' - k_{\max,j}\right) \right] dk' = \int_{k'=k_{\min,j}}^{k} \left| \frac{d\nu_j(k')}{dk'} \right| dk' = \tag{2.136}$$

$$= \left| \nu_j(k) - \nu_j\left(k_{\min,j}\right) \right| \quad \text{beziehungsweise}$$

$$\int_{k'=0}^{k} \left| \frac{d\nu_j(k')}{dk'} \right| \left[h\left(k' - k_{\min,j}\right) - h\left(k' - k_{\max,j}\right) \right] dk' = \int_{k'=k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} \left| \frac{d\nu_j(k')}{dk'} \right| dk' = \tag{2.137}$$

$$= \left| \nu_j\left(k_{\max,j}\right) - \nu_j\left(k_{\min,j}\right) \right|.$$

Dementsprechend ergibt sich letztendlich für $g(k)$ aus (2.135):

$$\begin{aligned} g(k) = \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{j=1}^{N} \Bigg\{ & \left| \nu_j(k) - \nu_j\left(k_{\min,j}\right) \right| \left[h\left(k - k_{\min,j}\right) - h\left(k - k_{\max,j}\right) \right] + \\ & + (\Delta\nu)_j \, h\left(k - k_{\max,j}\right) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.138}$$

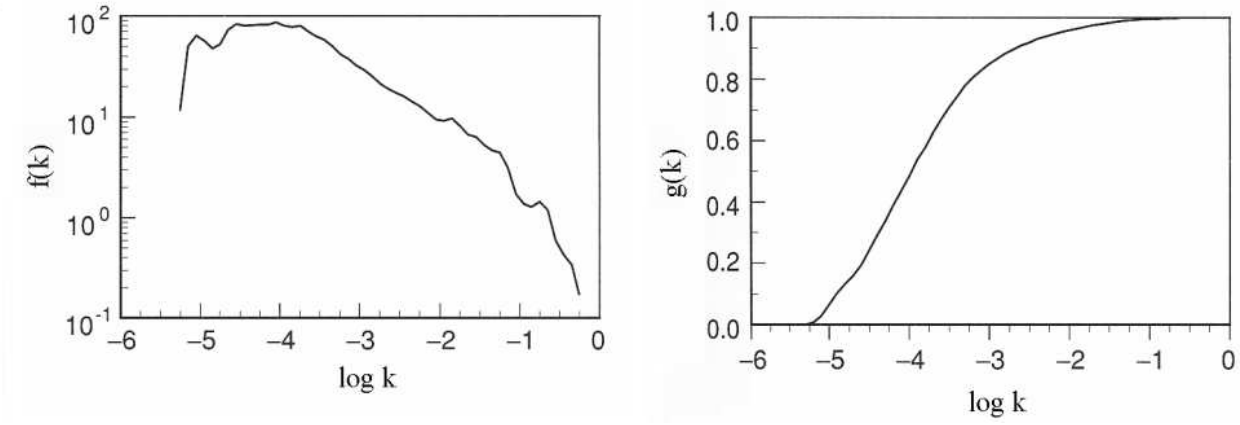


Abbildung 2.7: *k*-Verteilungsfunktion $f(k)$ und kumulative Wahrscheinlichkeitsfunktion $g(k)$ für den in Abbildung 2.5 dargestellten Ausschnitt aus dem Rotationsband von H_2O. Die Einheit des spezifischen Absorptionskoeffizienten ist $\mathrm{cm}^{-1}/\mathrm{atm}$ (übernommen aus [7]).

Eingedenk der Tatsache, dass $g(k)$ mit zunehmendem k stetig ansteigt, ist natürlich auch die Umkehrfunktion $k(g)$ durch (2.138) eindeutig bestimmt. Im Zuge dessen kann (2.131) nun tatsächlich konkret zur Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion herangezogen werden. Zur Veranschaulichung des Mappings vom ν-Raum in den k- beziehungsweise g-Raum zeigt Abbildung 2.7 die k-Verteilungsfunktion $f(k)$ und die kumulative Wahrscheinlichkeitsfunktion $g(k)$ für das in Abbildung 2.5 präsentierte Wellenzahlband. Abbildung 2.8 wiederum illustriert die Abhängigkeit des $(\nu \rightarrow k, g)$-Mappings vom Atmosphärenzustand.

2.3.3 Anwendung auf eine inhomogene Atmosphärenschicht

Der in der vorhergehenden Subsektion geführten Diskussion zufolge repräsentiert die Methode der k-Verteilung eine elegante Möglichkeit, die mühselige ν-Integration bei der Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion zu umgehen. Gleichung (2.131), die als Quintessenz der Methode der k-Verteilung aufzufassen ist, kann jedoch nur unter der Zugrundelegung einer homogenen Atmosphärenschicht und damit nur unter der Annahme eines räumlich konstanten spezifischen Absorptionskoeffizienten angewendet werden. In der weiteren Folge muss deswegen noch untersucht werden, inwieweit das Ersetzen der Integration im ν-Raum durch die Integration im g-Raum auch im Falle eines höhenabhängigen spezifischen Absorptionskoeffizienten zulässig ist. Auf Grund der in Subsektion 2.3.1 aufgezeigten Druck- und Temperaturabhängigkeit von k_ν erscheinen die diesbezüglichen Erfolgsaussichten auf den ersten Blick gering. Denn wenn sich

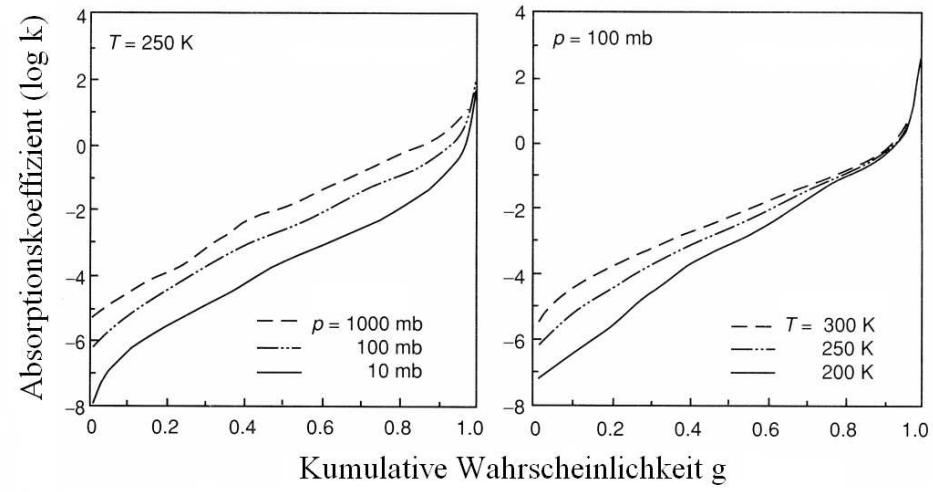


Abbildung 2.8: Der spezifische Absorptionskoeffizient (in der Einheit $\mathrm{cm}^{-1}/\mathrm{atm}$) als Funktion der kumulativen Wahrscheinlichkeit g für das zwischen 540 und 670 cm^{-1} gelegene CO_2-Wellenzahlband bei verschiedenen atmosphärische Bedingungen (übernommen aus [7]).

das Linienbild im betrachteten Wellenzahlband $\Delta\nu$ von Höhenlevel zu Höhenlevel ändert, kann nicht davon ausgegangen werden, dass das ν-Intervall $[\nu, \nu + d\nu]$ an jedem Höhenlevel mit ein- und demselben k-Intervall assoziiert ist beziehungsweise, anders formuliert, das k-Intervall $[k, k + dk]$ an jedem Höhenlevel auf ein- und dasselbe ν-Intervall zurückgeführt werden kann. Das Verfahren, welches ungeachtet dessen voraussetzt, dass das Mapping vom ν-Raum in den k- beziehungsweise g-Raum für zwei benachbarte dünne (i. e. homogene) Atmosphärenschichten in vollkommen analoger Weise vonstatten geht, läuft unter der Bezeichnung "Methode der korrelierten k-Verteilung" (CKD-Methode). Da diese Methode offensichtlich nur eine approximative Quantifizierung des Langwellenstrahlungstransfers erlaubt, ist natürlich zu klären, unter welchen Bedingungen sie als exakt angesehen werden darf beziehungsweise wie groß der Fehler bei der Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion ist, welcher aus der mangelhaften Korrelation zwischen den k-Verteilungen zweier aneinander grenzender homogener Atmosphärenschichten resultiert.

Betrachtet man eine inhomogene Atmosphärenschicht der Dicke z, gilt für die spektrale Transmissionsfunktion $T_{\overline{\nu}}$ gemäß (2.108):

$$T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) = \int_{\Delta\nu} \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int_{u'_a=0}^{u_a} k_\nu\left(u'_a\right) du'_a\right] \frac{d\nu}{\Delta\nu}. \tag{2.139}$$

Im Rahmen der Methode der korrelierten k-Verteilung wird nun postuliert, dass es auch im Falle einer inhomogenen Atmosphärenschicht zulässig ist, $T_{\bar{\nu}}$ durch eine Relation analog zu (2.130) auszudrücken (siehe zum Beispiel [7]). Wie leicht einzusehen ist, ergibt sich diese als

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = \int_{g=0}^{1} \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int_{u'_a=0}^{u_a} k\left(g,u'_a\right)du'_a\right]dg \tag{2.140}$$

sowie nach erfolgtem Übergang zu finiten Summen als

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = \sum_i \exp\left[-\frac{1}{\mu}\sum_j k_j\left(g_i\right)\left(\Delta u_a\right)_j\right]\left(\Delta g\right)_i. \tag{2.141}$$

Die Gültigkeit von (2.140) und (2.141) soll in der weiteren Folge anhand von zwei Grenzfällen demonstriert werden. Wenn der spezifische Absorptionskoeffizient des betrachteten Infrarotabsorbers im Wellenzahlband $\Delta\nu$ klein ist und/oder dessen Gesamtmasse in der Luftsäule mit der Längenerstreckung z/μ einen geringen Wert aufweist, kann die spektrale Transmissionsfunktion aus (2.139) mittels Potenzreihenentwicklung des Integranden[33] näherungsweise in der Form

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) \cong \int_{\Delta\nu}\left[1-\frac{1}{\mu}\int_{u'_a=0}^{u_a} k_\nu\left(u'_a\right)du'_a\right]\frac{d\nu}{\Delta\nu} \tag{2.142}$$

angeschrieben werden. Man spricht in diesem Fall vom Grenzfall der so genannten schwachen Absorption. Mit $k_\nu = \sum_m k_{\nu,m}$ und unter Berücksichtigung von (2.111) folgt weiter

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = 1-\frac{1}{\mu}\int_{u'_a=0}^{u_a}\left[\frac{1}{\Delta\nu}\sum_m S_m\left(u'_a\right)\right]du'_a. \tag{2.143}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass für alle Spektrallinien die Integration über das Wellenzahlband $\Delta\nu$ gleichbedeutend mit der Integration über den gesamten ν-Raum ist. Weil $k^* = \sum_m S_m/\Delta\nu$ und/oder u_a/μ klein ist, kann $T_{\bar{\nu}}$ aus (2.143) natürlich wiederum als Exponentialfunktion gedeutet werden:

$$T_{\bar{\nu}}(u_a/\mu) = \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int_{u'_a=0}^{u_a} k^*\left(u'_a\right)du'_a\right]. \tag{2.144}$$

[33] Es gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Integriert man (2.144) über das Wellenzahlband $\Delta\nu$, gelangt man schließlich zu der Beziehung

$$T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) = \frac{1}{\Delta\nu}\int\limits_{\Delta\nu} T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu)\,d\nu = \int\limits_{\Delta\nu} \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int\limits_{u'_a=0}^{u_a} k^*\left(u'_a\right)du'_a\right]\frac{d\nu}{\Delta\nu}. \quad (2.145)$$

Durch Gegenüberstellung von (2.139) und (2.145) stellt man fest, dass diese beiden Gleichungen vollkommen äquivalent sind. Der Unterschied liegt nur darin, dass k^* im Gegensatz zu k_ν unabhängig von der Wellenzahl ist. Die Reihenfolge, in der die infinitesimalen Beiträge zur spektralen Transmissionsfunktion in (2.145) gezählt werden, ist damit, wie sich von selbst versteht, beliebig. Dementsprechend kann davon ausgegangen werden, dass die Methode der korrelierten k-Verteilung, verkörpert durch (2.140) und (2.141), im Grenzfall der schwachen Absorption exakt gültig ist.

Wie sich herausstellt, ist die CKD-Methode darüber hinaus auch im konträren Grenzfall der starken Absorption als genau aufzufassen. Um dies zu zeigen, soll von atmosphärischen Bedingungen ausgegangen werden, bei denen die Lorentz-Linienform verwendet werden darf.[34] Gemäß (2.109) und (2.113) bekommt man im Zuge dessen für den spezifischen Absorptionskoeffizient des betrachteten Infrarotabsorbers:

$$k_\nu(p,T) = \sum_m \frac{S_m(T)}{\pi}\frac{\alpha_{L,m}(p,T)}{\left[(\nu-\nu_{0,m})^2+\alpha^2_{L,m}(p,T)\right]}. \quad (2.146)$$

Bei normalen Druck- und Temperaturverhältnissen ist der mittlere Abstand zwischen benachbarten Lorentz-Linien um einiges größer als die mittlere Halbwertsbreite. Im Besonderen trifft dies für die Absorptionsbänder des atmosphärischen Wasserdampfs zu. Außerdem ist festzuhalten, dass in unmittelbarer Umgebung des Zentrums einer einzelnen Lorentz-Linie (i. e. für $\nu \approx \nu_{0,m}$) die Absorption oft gesättigt ist, was zur Folge hat, dass das entsprechende Wellenzahlintervall sich praktisch nicht auf den Wert der spektralen Transmissionsfunktion auswirkt. Diese Annahme ist natürlich wiederum vor allem in der Troposphäre zulässig. Ruft man sich schließlich (2.114) in Erinnerung, findet man, dass nahe einem individuellen Linienmaximum $k_{\nu,m} \sim 1/\alpha_{L,m} \sim 1/p$ sowie weit entfernt davon (i. e. für $|\nu-\nu_{0,m}| \gg \alpha_{L,m}$) $k_{\nu,m} \sim \alpha_{L,m} \sim p$ gilt. Da die Höhenabhängigkeit des Drucks wesentlich ausgeprägter als die Höhenabhängigkeit der Temperatur ist und die Linienstärke sich damit wesentlich langsamer mit der Höhe ändert als die Linienbreite, wird infolgedessen mit zunehmendem Druck die Absorption in den Linienflügeln relativ zur Absorption in der Umgebung des Linienmaximums immer wichtiger.

[34] Solche atmosphärischen Bedingungen sind unterhalb einer Höhe von 20 km für gewöhnlich die Regel (siehe Subsektion 2.3.1).

Die Quintessenz der gerade aufgezählten Argumente liegt darin, dass in der unteren Atmosphäre häufig nur diejenigen Beiträge zur spektralen Transmissionsfunktion berücksichtigt werden müssen, die mit den Flügeln der einzelnen Lorentz-Linien assoziiert sind. Implementiert man demgemäß für alle m die Bedingung $|\nu - \nu_{0,m}| \gg \alpha_{L,m}$, ergibt sich aus (2.146) die Näherung

$$k_\nu(p,T) \cong \sum_m \frac{S_m(T)}{\pi} \frac{\alpha_{L,m}(p,T)}{(\nu-\nu_{0,m})^2}. \tag{2.147}$$

(2.147) repräsentiert den Grenzfall der starken Absorption. Eingedenk von (2.114) folgt aus (2.147) weiter

$$k_\nu(p,T) = \sum_m \frac{S_m(T)}{\pi} \frac{\alpha_{L,m}(p_0,T_0)}{(\nu-\nu_{0,m})^2} \left(\frac{p}{p_0}\right) \left(\frac{T_0}{T}\right)^n. \tag{2.148}$$

Setzt man den Referenzdruck p_0 und die Referenztemperatur T_0 in (2.147) ein, erhält man wiederum:

$$k_\nu(p_0,T_0) = \sum_m \frac{S_m(T_0)}{\pi} \frac{\alpha_{L,m}(p_0,T_0)}{(\nu-\nu_{0,m})^2}. \tag{2.149}$$

Durch Kombination von (2.148) und (2.149) kann der spezifische Absorptionskoeffizient dann in der Form

$$k_\nu(p,T) = k_\nu(p_0,T_0) R_\nu(T) \left(\frac{p}{p_0}\right) \tag{2.150}$$

ausgedrückt werden, wobei $R_\nu(T)$ durch

$$R_\nu(T) = \frac{\sum_m \frac{S_m(T)\alpha_{L,m}(p_0,T_0)}{(\nu-\nu_{0,m})^2}}{\sum_m \frac{S_m(T_0)\alpha_{L,m}(p_0,T_0)}{(\nu-\nu_{0,m})^2}} \left(\frac{T_0}{T}\right)^n \tag{2.151}$$

gegeben ist. Wie sich herausstellt, ist $R_\nu(T)$ üblicherweise in weit geringerem Maß von der Wellenzahl abhängig als $k_\nu(p_0,T_0)$ (siehe [1]). In einem schmalen Wellenzahlband $\Delta\nu$ –und ein solches wird ja fortwährend betrachtet– lässt sich die Funktion $R_\nu(T)$ folglich in guter Näherung durch ihren spektralen Mittelwert $R_{\overline{\nu}}(T)$ ersetzen. (2.150) wird damit zu

$$k_\nu(p,T) = k_\nu(p_0,T_0) R_{\overline{\nu}}(T) \left(\frac{p}{p_0}\right). \tag{2.152}$$

Importiert man nun (2.152) nach (2.139), bekommt man für die spektrale Transmissionsfunktion $T_{\overline{\nu}}$ im Grenzfall der starken Absorption:

$$T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) \cong \int_{\Delta\nu} e^{-k_\nu(p_0,T_0)\tilde{u}_a(u_a)/\mu} \frac{d\nu}{\Delta\nu}. \tag{2.153}$$

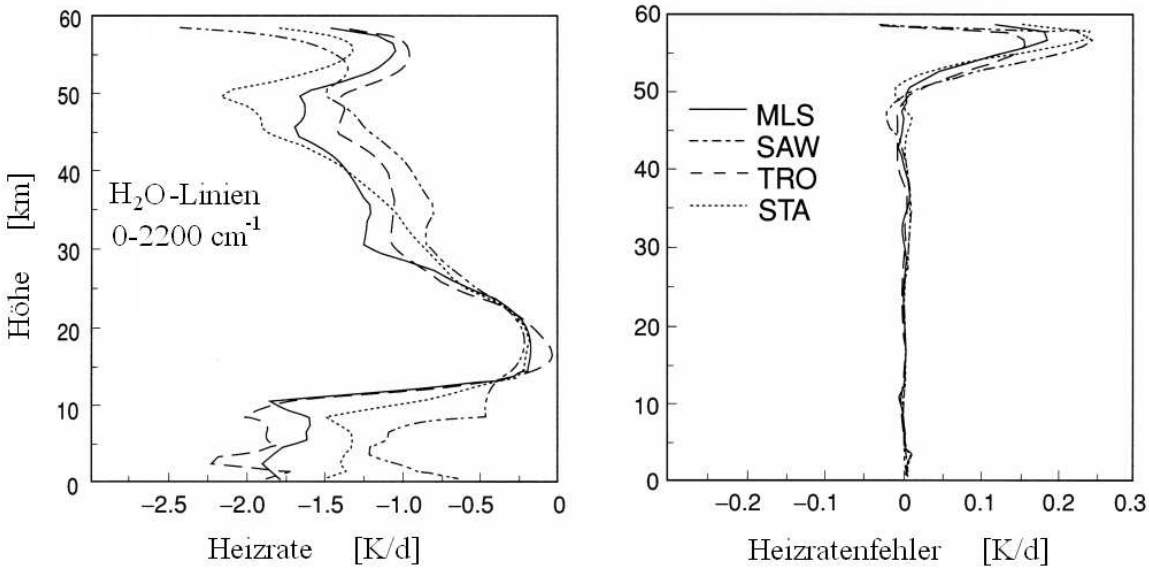


Abbildung 2.9: H_2O-Heizratenprofile für vier Standardatmosphären, berechnet anhand exakter Line-by-Line-Methoden, und darauf bezogene Fehlerprofile, die aus der Verwendung der CKD-Methode resultieren (MLS → Mid-Latitude Summer Atmosphere, SAW → Subarctic Winter Atmosphere, TRO →Tropical Atmosphere, STA →U.S. Standard Atmosphere 1976). Der Wellenzahlbereich von 0 bis 2200 cm^{-1} umfasst den Großteil der Langwellenstrahlungsabsorption durch H_2O-Linien (übernommen aus [7]).

Dabei ist $\tilde{u}_a$ eine über die Beziehung

$$\tilde{u}_a(u_a) = \frac{1}{p_0} \int_{u'_a=0}^{u_a} p\left(u'_a\right) R_{\overline{v}}\left(u'_a\right) du'_a \tag{2.154}$$

definierte skalierte Säulendichte. Durch Vergleich von (2.153) mit (2.125) wird ersichtlich, dass die Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion im Grenzfall der starken Absorption im Endeffekt so durchgeführt werden kann, als ob eine homogene Atmosphärenschicht vorliegen würde. Vorab ist lediglich ein atmosphärischer Referenzzustand zu definieren, der spezifische Absorptionskoeffizient für diesen Referenzzustand zu berechnen und die tatsächliche Säulendichte durch eine entsprechend skalierte Säulendichte zu ersetzen. Letzten Endes bedeutet die Äquivalenz von (2.153) und (2.125) natürlich, dass die Methode der korrelierten *k*-Verteilung auch im Grenzfall der starken Absorption exakt gültig ist.

Wenn weder von schwacher noch von starker Absorption ausgegangen werden kann, darf die CKD-Methode, wie zu Beginn dieser Subsektion angeführt,

grundsätzlich nur als Näherungsverfahren verstanden werden. Abbildung 2.9 illustriert den Fehler, den man bei der Berechnung von H_2O-Heizraten[35] anhand der CKD-Methode macht. Als Referenz dienen dabei Heizratenprofile, die durch exakte Line-by-Line Kalkulationen auf Basis von vier Standardatmosphären produziert wurden. In der Troposphäre und der Stratosphäre betragen die H_2O-Heizratenfehler durchwegs weniger als ± 0.01 K/d. Größere Abweichungen –nämlich bis zu 0.24 K/d– treten nur oberhalb der Stratopause auf. Stellt man dieses Fehlerprofil dem tatsächlichen Heizratenprofil gegenüber, wird zweifellos klar, dass die CKD-Methode ein hervorragendes Verfahren darstellt, wenn es darum geht, Langwellenstrahlungstransferkalkulationen unter Aufrechterhaltung einer hohen Genauigkeit mit minimalem Rechenaufwand durchzuführen. Dies gilt umso mehr, als die CKD-Methode in der weiteren Folge problemlos in Strahlungstransfermodelle integriert werden kann, die auch die Mehrfachstreuung von Langwellenstrahlung durch Wolken und Aerosolpartikel umfassen. Genau darauf beruht schließlich die potenzielle Anwendbarkeit der CKD-Methode in den Strahlungsschemen von Klimamodellen.

2.3.4 Überlappen von Absorptionslinien

Im Zuge der Ableitung der durch (2.51) gegebenen Schwarzschild-Gleichung für eine plan-parallele Atmosphäre[36] wurde davon ausgegangen, dass bei der jeweils betrachteten Wellenzahl lediglich ein einziger infrarotaktiver Luftbestandteil für Absorption und Emission von Langwellenstrahlung verantwortlich zeichnet. Tatsächlich kommt es im Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung jedoch nicht selten vor, dass sich Absorptionsbänder verschiedener Infrarotabsorber überschneiden. Ein klassisches Beispiel hierfür ist das signifikante Überlappen von Absorptionslinien des H_2O-Rotationsbandes und des 15-μm-Bandes von CO_2. Wie ebendieser Sachverhalt im Rahmen der Methode der korrelierten k-Verteilung gehandhabt werden kann, soll in dieser Subsektion demonstriert werden (siehe zum Beispiel [7]).

Sind bei einer bestimmten Wellenzahl mehrere infrarotaktive Luftbestandteile wirksam, lässt sich die optische Tiefe τ_ν eingedenk von (2.42) ganz analog zu (2.50) in der Form

$$\tau_\nu(z) = \int_{z'=z}^{z_\infty} \overline{k}_\nu\left(z'\right) \rho\left(z'\right) dz' \tag{2.155}$$

[35] Mit Heizrate ist hier stets die radiative Temperaturänderungsrate gemeint.

[36] In Erinnerung zu rufen ist an dieser Stelle, dass diese Gleichung den Ausgangspunkt für alle in Kapitel 2 nachfolgenden Betrachtungen darstellt.

anschreiben, wobei

$$\overline{k}_\nu = \sum_i k_\nu^{(i)} q_i = \sum_i k_\nu^{(i)} \frac{\rho_i}{\rho} \tag{2.156}$$

den via (2.30) definierten mittleren spezifischen Absorptionskoeffizient repräsentiert. Betrachtet man, wie eingangs dieser Subsektion angekündigt, einen Wellenzahlbereich, in dem sich H_2O- und CO_2-Linien überlagern, ergibt sich aus (2.155) unter Berücksichtigung von (2.156)

$$\tau_\nu = \tau_\nu^{(H_2O)} + \tau_\nu^{(CO_2)}, \tag{2.157}$$

mit

$$\tau_\nu^{(H_2O)}(z) = \int_{z'=z}^{z_\infty} k_\nu^{(H_2O)}(z') \rho_{H_2O}(z') dz', \tag{2.158}$$

$$\tau_\nu^{(CO_2)}(z) = \int_{z'=z}^{z_\infty} k_\nu^{(CO_2)}(z') \rho_{CO_2}(z') dz'. \tag{2.159}$$

Der Einfachheit halber sollen von jetzt an alle mit Wasserdampf verknüpften Größen mit “1” und alle mit Kohlendioxid verknüpften Größen mit “2” indiziert werden. Für die monochromatische Transmissionsfunktion T_ν bekommt man dann zufolge von (2.60) den Ausdruck

$$T_\nu(\tau_\nu/\mu) = e^{-\tau_\nu^{(1)}/\mu} e^{-\tau_\nu^{(2)}/\mu} = T_\nu^{(1)}\left(\tau_\nu^{(1)}/\mu\right) T_\nu^{(2)}\left(\tau_\nu^{(2)}/\mu\right). \tag{2.160}$$

Untersucht man nun wie in Subsektion 2.3.2 Langwellenstrahlungstransfer in einer homogenen Atmosphärenschicht der Dicke z, schreibt sich (2.160) zu

$$T_\nu(u_a/\mu) = e^{-k_\nu^{(1)} u_1/\mu} e^{-k_\nu^{(2)} u_2/\mu} = T_\nu^{(1)}(u_1/\mu) T_\nu^{(2)}(u_2/\mu), \tag{2.161}$$

wobei $u_a = u_1 + u_2$ die Summe von H_2O-Säulendichte und CO_2-Säulendichte repräsentiert.[37] Dadurch, dass die H_2O- und CO_2-Linien als statistisch unabhängig behandelt werden können, gilt weiters für die in (2.68) definierte spektrale Transmissionsfunktion $T_{\overline{\nu}}$, aufgefasst als Mittelwert von T_ν im schmalen Wellenzahlband $\Delta\nu$:

$$T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) = \int_{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu} \frac{1}{(\Delta\nu)^2} T_{\nu_1}^{(1)}(u_1/\mu) T_{\nu_2}^{(2)}(u_2/\mu) d\nu_2 d\nu_1. \tag{2.162}$$

[37] Zur Definition der Säulendichte siehe (2.107).

Dabei ist $1/(\Delta\nu)^2 d\nu_1 d\nu_2$ die Wahrscheinlichkeit, dass T_1 einen Wert zwischen $T_1(\nu_1)$ und $T_1(\nu_1 + d\nu_1)$ und T_2 einen Wert zwischen $T_2(\nu_2)$ und $T_2(\nu_2 + d\nu_2)$ aufweist. Auswertung des Integrals auf der rechten Seite von (2.162) führt schließlich zu folgender Relation:

$$\begin{aligned} T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) &= \frac{1}{\Delta\nu}\int\limits_{\Delta\nu} T_{\nu_1}^{(1)}(u_1/\mu)\,d\nu_1 \cdot \frac{1}{\Delta\nu}\int\limits_{\Delta\nu} T_{\nu_2}^{(2)}(u_2/\mu)\,d\nu_2 = \\ &= \frac{1}{\Delta\nu}\int\limits_{\Delta\nu} e^{-k_\nu^{(1)}u_1/\mu}d\nu \cdot \frac{1}{\Delta\nu}\int\limits_{\Delta\nu} e^{-k_\nu^{(2)}u_2/\mu}d\nu = \\ &= T_{\overline{\nu}}^{(1)}(u_1/\mu)\,T_{\overline{\nu}}^{(2)}(u_2/\mu). \end{aligned} \tag{2.163}$$

Da beabsichtigt wird, die spektrale Transmissionsfunktion von (2.163) anhand der Methode der k-Verteilung zu berechnen, hat man an dieser Stelle nun die Transformation vom ν-Raum in den k_1- beziehungsweise k_2-Raum durchzuführen. Ruft man sich zu diesem Zweck (2.127) in Erinnerung, erhält man:

$$T_{\overline{\nu}}(u_a/\mu) = \int\limits_{k_1=0}^{\infty} e^{-k_1u_1/\mu} f_1(k_1)\,dk_1 \cdot \int\limits_{k_2=0}^{\infty} e^{-k_2u_2/\mu} f_2(k_2)\,dk_2. \tag{2.164}$$

Mit der Substitution $k_1 = k'\rho_2/\rho_1 = k'q_2/q_1$, $k_2 = k''$ und unter Berücksichtigung von (2.107)[38] ergibt sich aus (2.164)

$$\begin{aligned} T_{\overline{\nu}}(u_2/\mu) &= \int\limits_{k'=0}^{\infty} e^{-k'u_2/\mu} f_1^*(k')\,dk' \cdot \int\limits_{k''=0}^{\infty} e^{-k''u_2/\mu} f_2^*(k'')\,dk'' = \\ &= \int\limits_{k'=0}^{\infty}\int\limits_{k''=0}^{\infty} e^{-(k'+k'')u_2/\mu} f_1^*(k')\,f_2^*(k'')\,dk''dk', \end{aligned} \tag{2.165}$$

wobei die neuen Verteilungsfunktionen

$$f_1^*(k') = \frac{q_2}{q_1} f_1\left(\frac{q_2}{q_1}k'\right), \tag{2.166}$$

$$f_2^*(k'') = f_2(k'') \tag{2.167}$$

eingeführt wurden. Definiert man des Weiteren $k = k' + k''$ und ersetzt im Anschluss daran k'' durch $k - k'$, lässt sich der Ausdruck für die spektrale Transmissionsfunktion von (2.165) folgendermaßen umschreiben:

$$T_{\overline{\nu}}(u_2/\mu) = \int\limits_{k'=0}^{\infty}\int\limits_{k=k'}^{\infty} e^{-ku_2/\mu} f_1^*(k')\,f_2^*(k-k')\,dkdk'. \tag{2.168}$$

[38] homogene Verhältnisse!

Zu beachten ist bei der Ableitung von (2.168), dass k', was die innere Integration anbelangt, als Konstante aufzufassen ist, so dass $dk'' = d(k-k') = dk$ gesetzt werden kann. Die Integrationsfläche in (2.168) umfasst in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit der Abszisse k' und der Ordinate k jenen Bereich des ersten Quadranten, welcher von der positiven k-Achse und dem Strahl $k = k'$ $(k' \geq 0)$ berandet wird. Durch Vertauschen der inneren und äußeren Integration bekommt man infolgedessen zunächst

$$T_{\bar{\nu}}(u_2/\mu) = \int_{k=0}^{\infty} e^{-ku_2/\mu} dk \int_{k'=0}^{k} f_1^*(k')\, f_2^*(k-k')\, dk' \tag{2.169}$$

und daraufhin

$$T_{\bar{\nu}}(u_2/\mu) = \int_{k=0}^{\infty} e^{-ku_2/\mu} f(k)\, dk, \tag{2.170}$$

wobei im zweiten Schritt unter Einbeziehung von (2.166) und (2.167) die resultierende Verteilungsfunktion

$$f(k) = \int_{k'=0}^{k} f_1^*(k')\, f_2^*(k-k')\, dk' = \int_{k_1=0}^{\frac{q_2}{q_1}k} f_1(k_1)\, f_2\left(k - \frac{q_1}{q_2}k_1\right) dk_1 \tag{2.171}$$

eingeführt wurde. Substituiert man nun in (2.170) –eingedenk der Vorgangsweise bei der Ableitung von (2.130)– für k die resultierende kumulative Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$g(k) = \int_{\tilde{k}=0}^{k} f(\tilde{k})\, d\tilde{k} = \int_{\tilde{k}=0}^{k} \int_{k_1=0}^{\frac{q_2}{q_1}\tilde{k}} f_1(k_1)\, f_2\left(\tilde{k} - \frac{q_1}{q_2}k_1\right) dk_1 d\tilde{k}, \tag{2.172}$$

ergibt sich letztendlich für die spektrale Transmissionsfunktion der Ausdruck

$$T_{\bar{\nu}}\left(u_{CO_2}/\mu\right) = \int_{g=0}^{1} e^{-k(g)u_{CO_2}/\mu} dg. \tag{2.173}$$

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, dass (2.173) eine exakte analytische Lösung von $T_{\bar{\nu}}$ darstellt. Dies beruht auf der Tatsache, dass von homogenen spezifischen Absorptionskoeffizienten $k_\nu^{(1)}$ und $k_\nu^{(2)}$ ausgegangen wurde. Betrachtet man Langwellenstrahlungstransfer in einer inhomogenen Atmosphärenschicht der Dicke z, muss der Höhenabhängigkeit von $k_\nu = (q_1/q_2)\, k_\nu^{(1)} + k_\nu^{(2)}$ natürlich Rechnung getragen werden. Erfolgt dies, wie in der vorangehenden Subsektion diskutiert, im

Sinne der Methode der korrelierten *k*-Verteilung, geht (2.173) zufolge von (2.140) in

$$T_{\overline{\nu}}\left(u_{CO_2}/\mu\right) = \int_{g=0}^{1} \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int_{u'_{CO_2}=0}^{u_{CO_2}} k\left(g,u'_{CO_2}\right)du'_{CO_2}\right]dg \tag{2.174}$$

über.

Abschließend bleibt noch zu bemerken, dass (2.173) und (2.174) zwar der Anschaulichkeit halber für einen Spezialfall, nämlich für das Überlappen von H_2O- und CO_2-Linien abgeleitet wurden, prinzipiell jedoch auf ein beliebiges schmales Wellenzahlband $\Delta\nu$, in dem insgesamt zwei Luftbestandteile als Infrarotabsorber wirksam sind, angewendet werden können. Konkret ist in (2.173) und (2.174) lediglich die CO_2-Säulendichte durch die Säulendichte eines der beiden Infrarotabsorber zu ersetzen.

Kapitel 3

Wasserdampf und Langwellenstrahlung

3.1 Atmosphärischer Wasserdampf

Wasserdampf kann auf Grund seines fundamentalen Impakts auf den Energiehaushalt der Atmosphäre zweifelsohne als das wichtigste atmosphärische Spurengas angesehen werden. Denn zum einen trägt Wasserdampf wegen seiner hohen Infrarotaktivität in entscheidender Weise zum Treibhauseffekt bei. Zum anderen speichert er aber auch noch Energie in Form von latenter Wärme, die im Zuge der Ausbildung von Wolken und anschließender Niederschlagsereignisse der Atmosphäre zur Verfügung gestellt wird. Wolken spielen dann wiederum ihrerseits eine zentrale Rolle im atmosphärischen Strahlungshaushalt, und zwar sowohl, was die Kurzwellenstrahlung angeht, als auch, was die Langwellenstrahlung betrifft.[1] Wie in Subsektion 1.3.1 diskutiert wurde, zeichnen sich die Bestandteile der trockenen Luft, i. e. molekularer Stickstoff, molekularer Sauerstoff, Argon und Kohlendioxid, jeweils durch ein homogenes Höhenprofil des Volumenmischungsverhältnisses aus, weil etwaige Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse wesentlich langsamer ablaufen als die vertikale Verteilung durch Eddy-Diffusion. Was Wasserdampf angeht, sind die charakteristischen Zeiten für Erzeugung (durch Verdunstung an der Oberfläche der Ozeane und Evapotranspiration[2]) und Vernichtung (durch Wolkenbildung) weitaus kleiner, was zur Folge hat, dass sein Volumenmischungsverhältnis stark höhenabhängig ist. Diese Höhenabhängigkeit weist zudem eine starke dynamische Komponente auf, zumal Wasserdampf über Transportprozesse, die von Natur aus zum Abbau des Un-

[1] Näheres dazu siehe Subsektion 2.1.1.

[2] Unter Evapotranspiration versteht man die Abgabe von Wasserdampf durch die Haut von Tieren und Menschen sowie durch die Spaltöffnungen von Pflanzen.

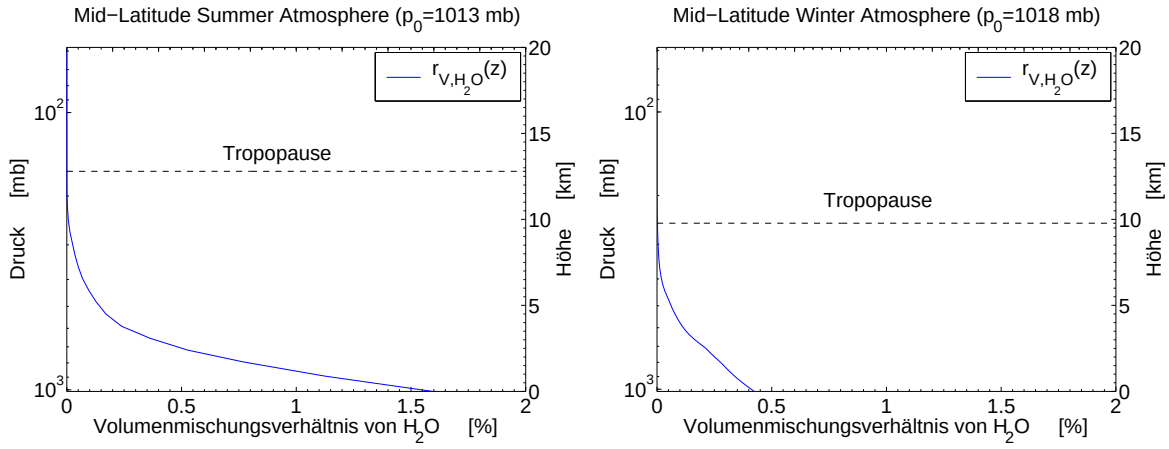


Abbildung 3.1: H_2O-Volumenmischungsverhältnis r_{V,H_2O} als Funktion der Höhe gemäß der MLS-Atmosphäre (linkes Bild) beziehungsweise der MLW-Atmosphäre (rechtes Bild). Die Bodentemperatur beträgt im Falle der MLS-Atmosphäre 294.2 K und im Falle der MLW-Atmosphäre 272.2 K.

gleichgewichts zwischen Wasserdampfquellen und Wasserdampfsenken notwendig sind, eng mit der atmosphärischen Zirkulation verknüpft ist. Beim Wasserdampftransport kann grundsätzlich zwischen vertikalem und horizontalem Transport unterschieden werden. Vertikaler Transport erfolgt über Konvektionszellen, die sich im Rahmen des lokalen Wasserkreislaufs, i. e. des lokalen hydrologischen Zyklus, ausbilden. Horizontaler Transport wiederum geht über großskalige Advektionsströmungen vonstatten, welche Teil der globalen Zirkulation sind. Auf dem Zusammenspiel von vertikalem und horizontalem Wasserdampftransport beruht letzten Endes dann die Komplexität, die der Verteilung des atmosphärischen Wasserdampfs sowohl im räumlichen wie auch im zeitlichen Sinne innewohnt.

Abbildung 3.1 zeigt den vertikalen Verlauf des Volumenmischungsverhältnisses von Wasserdampf zufolge zweier Standardatmosphären, der MLS-Atmosphäre ("Mid-Latitude Summer Atmosphere") und der MLW-Atmosphäre ("Mid-Latitude Winter Atmosphere").[3] Wie ersichtlich wird, ist fast der gesamte atmosphärische Wasserdampf auf den unteren und mittleren Bereich der Troposphäre konzentriert. Dies beruht einsichtigerweise auf der Tatsache, dass für gewöhnlich die Wolkenbildung bis zur Tropopause hin praktisch abgeschlossen ist und damit nur geringe Wasserdampfmengen in die Stratosphäre nachgeliefert werden können. Ruft man sich nun Tabelle 1.1 in Erinnerung, stellt man fest, dass sowohl im Falle der MLS- als auch im Falle der MLW-Atmosphäre die bodennahen Wasserdampfkonzentrationen deutlich über den entsprechenden Konzentrationen der übrigen infrarot-

[3] Die Daten zu diesen beiden Standardatmosphären stammen aus Beispielinputfiles, die dem Sourcecode des Strahlungstransfermodells RRTM (Version 3.0) beigefügt sind (siehe Sektion 3.2).

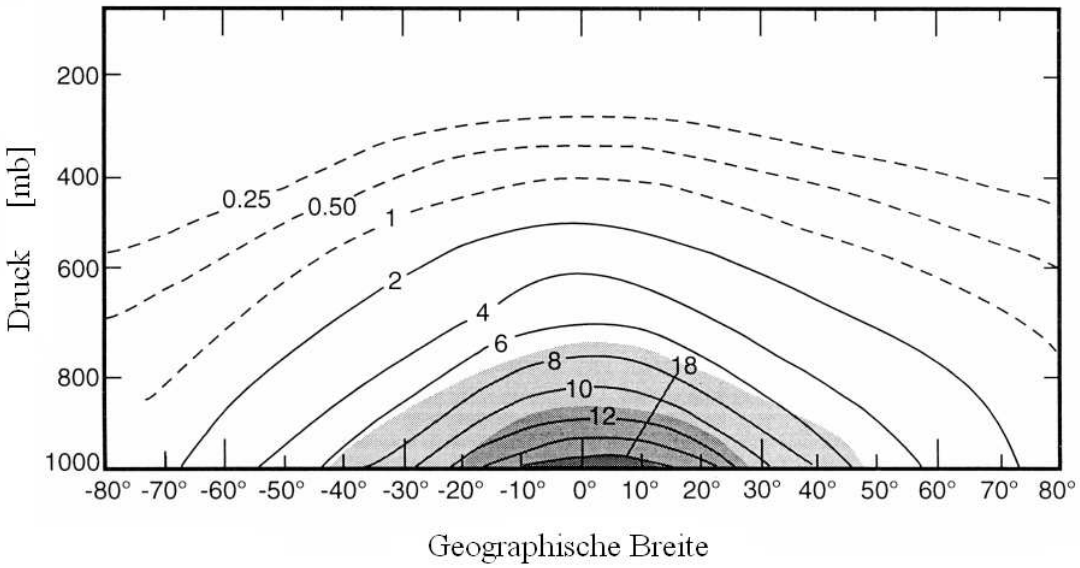


Abbildung 3.2: Langfristiges zonales Mittel des H_2O-Massenmischungsverhältnisses r_{M,H_2O} (Konturen) beziehungsweise der H_2O-Massendichte ρ_{H_2O} (Schattierungen). Die Konturen sind in der Einheit g/kg beschriftet. Die Schattierungen umfassen nacheinander eine jeweils 20%-ige Abnahme von ρ_{H_2O} gegenüber dem äquatorialen Maximalwert (übernommen aus [16]).

aktiven Spurengase liegen. Der Treibhauseffekt wird damit in der Troposphäre wohl hauptsächlich auf Wasserdampf zurückzuführen sein. Diese grundsätzliche Vermutung wird erwartungsgemäß durch die Ergebnisse exakter Line-by-Line-Kalkulationen bestätigt.

Abbildung 3.2 illustriert die Höhenabhängigkeit der Wasserdampfverteilung zusammen mit ihrer Breitenabhängigkeit. Zu sehen sind auf der einen Seite Konturen, die konstanten Werten des langfristig und zonal gemittelten H_2O-Massenmischungsverhältnisses entsprechen, und zum anderen Schattierungen, welche die Breiten- und Höhenabhängigkeit der –ebenfalls langfristig und zonal gemittelten– Massendichte von Wasserdampf widerspiegeln. Wie man sieht, beschränkt sich der Großteil des global vorhandenen Wasserdampfs auf die Regionen um den Äquator. Am Erdboden findet man dort einen Maximalwert des mittleren H_2O-Massenmischungsverhältnisses von rund 20 g/kg. Polwärts wird die Konzentration von Wasserdampf relativ rasch kleiner. In Gebieten jenseits von 60° nördlicher und südlicher Breite fällt der Bodenwert des mittleren H_2O-Massenmischungsverhältnisses schließlich bis unter 4 g/kg ab.

Eine wichtige Feststellung, die sich indirekt aus Abbildung 3.2 ableiten lässt,

lautet, dass die polwärts erfolgende Abnahme der H_2O-Säulendichte[4] offensichtlich als Abnahme zufolge sinkender Bodentemperatur zu verstehen ist. Um dies erklären zu können, muss man zunächst der Frage nachgehen, wieviel Wasserdampf die Atmosphäre prinzipiell überhaupt aufzunehmen vermag. Als Schlüsselgröße kommt dabei der Sättigungsdampfdruck des atmosphärischen Wassers e_S ins Spiel. Unter der Annahme, dass nur Übergänge zwischen der gasförmigen und der flüssigen Phase stattfinden, ist der Sättigungsdampfdruck als jener Wasserdampfpartialdruck zu verstehen, bei dem Wasserdampf und flüssiges Wasser miteinander im chemischen Gleichgewicht sind. Wenn der Wasserdampfpartialdruck e einen geringeren Wert als e_S aufweist und –was zu betonen ist– flüssiges Wasser vorhanden ist, erfolgt demnach so lange Verdunstung, bis sich der Wert von e auf den Wert von e_S erhöht hat. Ist umgekehrt e größer als e_S, werden in entsprechender Weise Kondensationsprozesse zwecks Wiederherstellens eines chemischen Gleichgewichtszustandes in Gang gesetzt. Letzteres hat natürlich zur Folge, dass e_S schließlich als der maximal in der Atmosphäre mögliche Wasserdampfpartialdruck aufzufassen ist.

Einen mathematischen Ausdruck für den Sättigungsdampfdruck des atmosphärischen Wassers bekommt man über die Clausius-Clapeyron-Gleichung. Diese kann, wie in der Thermodynamik gezeigt wird, in folgender Form angeschrieben werden (siehe zum Beispiel [16]):

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{e_S L_E(T) M_{H_2O}}{R^* T^2}. \tag{3.1}$$

Dabei steht R^* für die universelle Gaskonstante und M_{H_2O} für das Molekulargewicht von Wasser.[5] L_E ist die bereits in Subsektion 2.1.2 eingeführte Evaporationswärme. Bei 0° C beträgt diese 2501 J/g. Wie aus (3.1) hervorgeht, ist e_S ausschließlich von der Temperatur abhängig. Um Grundsätzliches über diese Temperaturabhängigkeit zu erfahren, soll in der weiteren Folge L_E als Konstante aufgefasst werden. Dies ist ohne weiteres zulässig, da L_E sich über den Bereich realistischer troposphärischer Temperaturen nur geringfügig ändert. Integration von (3.1) führt dann zu

$$e_S(T) = e_{S,0} \exp\left[\frac{L_E(T_0) M_{H_2O}}{R^*}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right], \tag{3.2}$$

wobei $e_{S,0} = e_S(T_0)$ den Sättigungsdampfdruck bei einer Referenztemperatur T_0 repräsentiert. Der Punkt im thermodynamischen Zustandsraum des atmosphärischen Wassers, an dem die gasförmige, die flüssige und die feste Phase miteinander im chemischen Gleichgewicht sind, heißt Tripelpunkt. Für diesen gilt

[4] Mit der H_2O-Säulendichte ist hier die Gesamtmasse des atmosphärischen Wasserdampfs pro Quadratmeter Erdboden gemeint.

[5] Siehe dazu auch Anhang B.

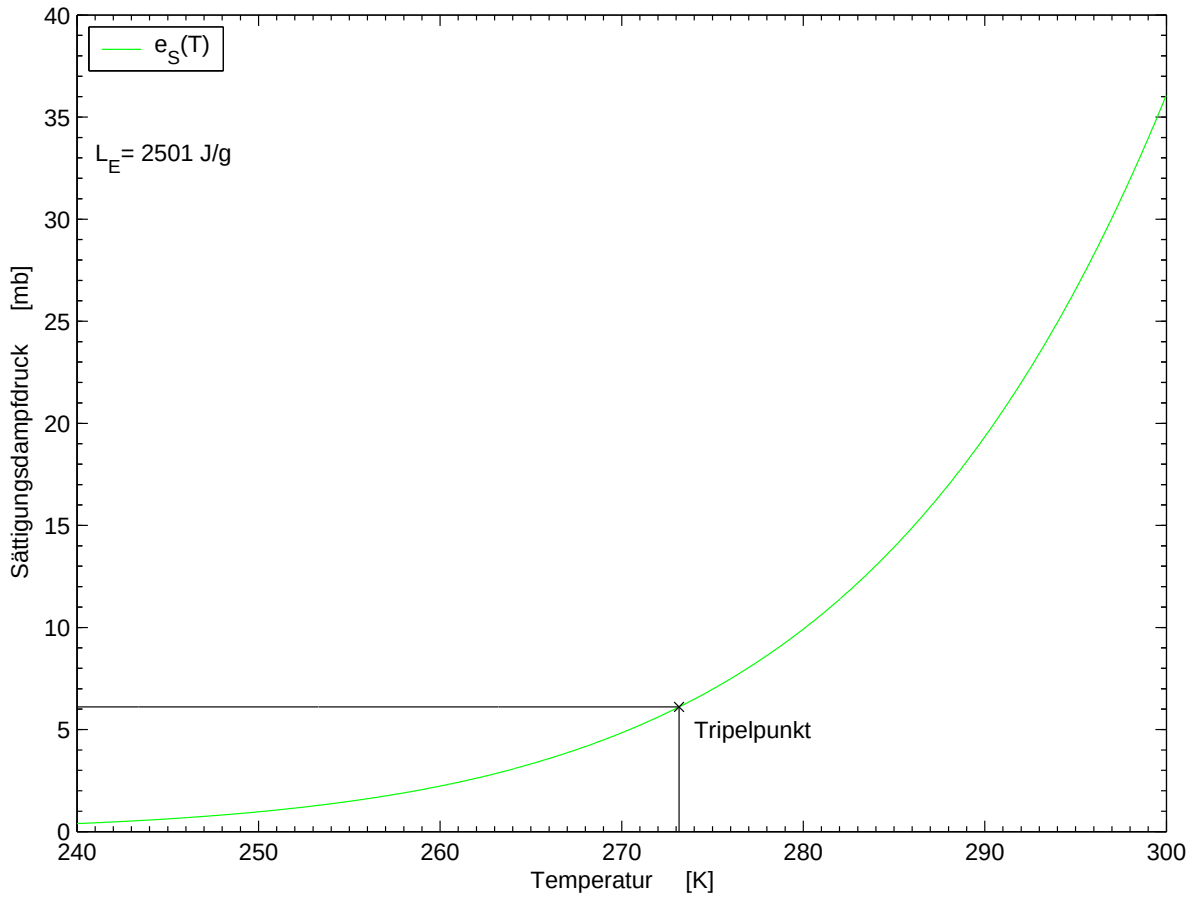


Abbildung 3.3: Der Sättigungsdampfdruck des atmosphärischen Wassers als Funktion der Temperatur.

$T = T_t = 273.16$ K (umgerechnet 0.01 °C) und $e_S = e_{S,t} = 6.11$ mb. Verwendet man die Tripelpunkttemperatur T_t als Referenztemperatur in (3.2), erhält man für e_S schließlich:

$$e_S(T) = e_{S,t} \exp\left[\frac{L_E(T_t) M_{H_2O}}{R^*}\left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{T}\right)\right]. \tag{3.3}$$

Wie aus Abbildung 3.3 hervorgeht, nimmt e_S mit der Temperatur stark zu. Damit wird klar, dass auf Grund des Temperaturunterschieds tropische Atmosphärenregionen wesentlich größere Wasserdampfmengen speichern können als polare Atmosphärenregionen. Die ausgeprägte Temperaturabhängigkeit von e_S bedeutet überdies, dass an der Oberfläche eines warmen Ozeans sehr viel mehr Wasser zur Aufrechterhaltung eines chemischen Gleichgewichtszustandes verdunsten muss als an der Oberfläche eines kalten Ozeans. Dieser Tatsache zufolge

ist dann grundsätzlich der Schluss zulässig, dass, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, im langfristigen zonalen Mittel neben der maximal möglichen H_2O-Säulendichte auch die tatsächliche H_2O-Säulendichte polwärts abnimmt. Eine detailliertere Erklärung dieses Sachverhalts erfordert jedoch zusätzlich die Berücksichtigung der großskaligen Transportprozesse, in deren Rahmen Wasserdampf von den tropischen Breiten aus über den ganzen Globus verteilt wird.

Am Ende dieser Sektion soll nun noch ein kurzer Blick auf ein viel behandeltes Thema, nämlich auf die Rolle des atmosphärischen Wasserdampfs im globalen Klimawandel, geworfen werden. Prinzipiell ist unter dem globalen Klimawandel eine Erhöhung der mittleren globalen Bodentemperatur zu verstehen, welche auf dem so genannten anthropogenen, i. e. vom Menschen verursachten Treibhauseffekt beruht. Zurückgeführt wird Letzterer primär auf eine Steigerung der atmosphärischen Kohlendioxidkonzentration. Davon ausgehend, dass die Temperatur im Zuge des anthropogenen Treibhauseffekts nicht nur am Erdboden, sondern generell in der Troposphäre zunimmt, erhöht sich gemäß Abbildung 3.3 zweifelsohne die Aufnahmekapazität der Luft im Hinblick auf Wasserdampf. Die Frage ist nur, ob die H_2O-Säulendichte auch dann größer wird, wenn die Luft, wie es im langfristigen globalen Mittel der Fall ist, ungesättigt ist. Um diesbezüglich Klarheit zu schaffen, betrachtet man zunächst die Zustandsgleichung eines idealen Gases. Diese kann gemäß (2.12) in der Form

$$p = nkT \tag{3.4}$$

angeschrieben werden. Da $p = \sum_i p_i$ und $n = \sum_i n_i$ gilt, wobei p_i den Partialdruck und n_i die Teilchenanzahldichte des i-ten Luftbestandteils repräsentiert, folgt aus (3.4) für den atmosphärischen Wasserdampf:

$$e = n_{H_2O} kT. \tag{3.5}$$

Weiters benötigt man die bereits in Subsektion 2.1.2 eingeführte spezifische Feuchte q_{H_2O}, gegeben durch

$$q_{H_2O} = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho} \tag{3.6}$$

(siehe Anhang B) sowie die relative Feuchte f_r. Letztere ist als Verhältnis von q_{H_2O} zur maximal möglichen spezifischen Feuchte, i. e. zur spezifischen Feuchte bei gesättigter Luft, definiert und schreibt sich folglich als

$$f_r = \frac{q_{H_2O}}{q_{H_2O,S}}. \tag{3.7}$$

Im Zuge der Division von (3.5) durch (3.4) ergibt sich im Falle von Sättigung

$$\frac{e_S}{p} = \frac{n_{H_2O,S}}{n} = \frac{\rho_{H_2O,S}}{\rho} \frac{\overline{M}}{M_{H_2O}}, \tag{3.8}$$

wobei $\overline{M}$ für das mittlere Molekulargewicht der Luft steht. Importiert man diese Relation nach (3.6), bekommt man für die maximal mögliche spezifische Feuchte:

$$q_{\mathrm{H_2O},S} = \frac{e_S}{p}\frac{M_{\mathrm{H_2O}}}{\overline{M}}. \tag{3.9}$$

Verknüpfung von (3.9) mit (3.7) führt dann schließlich zu der Beziehung

$$q_{\mathrm{H_2O}} = f_r\frac{e_S}{p}\frac{M_{\mathrm{H_2O}}}{\overline{M}}. \tag{3.10}$$

Wie aus (3.10) hervorgeht, bedeutet eine Zunahme des Sättigungsdampfdrucks an einem Drucklevel p nicht unbedingt eine Erhöhung der spezifischen Feuchte, da es durchaus möglich ist, dass die relative Feuchte mit steigender Temperatur geringer wird. Die Analyse von zahlreichen Messungen der atmosphärischen Wasserdampfkonzentration lässt indessen den Schluss zu, dass sich der mittlere globale Höhenverlauf der relativen Feuchte mit der Zeit kaum ändert (siehe zum Beispiel [7]). Infolgedessen kann davon ausgegangen werden, dass im Rahmen des anthropogenen Treibhauseffekts tatsächlich nicht nur die maximal mögliche H_2O-Säulendichte, sondern auch die reale H_2O-Säulendichte zunimmt. Die Zunahme der realen H_2O-Säulendichte geht wiederum mit einer Erhöhung der mittleren globalen Bodentemperatur einher, welche sich im Prinzip zu jener ursprünglichen Erhöhung addiert, die mit der ansteigenden Kohlendioxidkonzentration assoziiert wird. In diesem Sinn spricht man dann vom so genannten Wasserdampf-Feedback des Klimasystems. Wie stark dieses positive Feedback ausfällt, muss in der weiteren Folge natürlich anhand eines geeigneten Klimamodells berechnet werden.

3.2 Das "Rapid Radiative Transfer Model" (RRTM)

Die Berechnungen zu der in der nächsten Sektion präsentierten Studie hinsichtlich der Wasserdampfsensitivität des Langwellenstrahlungstransfers führte ich anhand des in Fortran 90 programmierten Programms "Rapid Radiative Transfer Model" (RRTM) durch. Aus diesem Grund sollen in der weiteren Folge essenzielle Merkmale von RRTM kurz diskutiert werden.[6] RRTM wurde von "Atmospheric and Environmental Research"[7] (AER) entwickelt und berechnet Einstrahlung, Ausstrahlung, Strahlungsflussdichte und die radiative Temperaturänderungsrate im Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung. Konkret ist damit der Wellenzahlbereich von 10 bis 3250 cm^{-1} gemeint. Dieser entspricht einem Wellenlängenbereich von 3.1 bis 1000 μm. RRTM basiert auf der in Sektion 2.3 behandelten

[6] Alle Angaben beziehen sich dabei auf die Version 3.0 von RRTM.

[7] Siehe auch http://www.rtweb.aer.com.

Tabelle 3.1: RRTM-Infrarotabsorber (ohne FCKW's). Der Zusatz "$\sim$" bedeutet, dass die entsprechende Molekülsorte im betrachteten Subintervall und Höhenbereich als sekundärer Infrarotabsorber aufgefasst wird und folglich deren Behandlung durch RRTM nicht als exakt im Sinne der CKD-Methode zu verstehen ist.

Subintervall	Wellenzahlbereich	1050 - 96 mb	96 - 0.01 mb
1	10-350 cm^{-1}	H_2O, N_2 $\sim$	H_2O, N_2 $\sim$
2	350-500 cm^{-1}	H_2O	H_2O
3	500-630 cm^{-1}	H_2O, CO_2, N_2O $\sim$	H_2O, CO_2, N_2O $\sim$
4	630-700 cm^{-1}	H_2O, CO_2	CO_2, O_3
5	700-820 cm^{-1}	H_2O, CO_2, O_3 $\sim$	CO_2, O_3
6	820-980 cm^{-1}	H_2O, CO_2 $\sim$	—
7	980-1080 cm^{-1}	H_2O, O_3, CO_2 $\sim$	O_3, CO_2
8	1080-1180 cm^{-1}	H_2O, CO_2 $\sim$, O_3 $\sim$, N_2O $\sim$	O_3, CO_2 $\sim$, N_2O $\sim$
9	1180-1390 cm^{-1}	H_2O, CH_4, N_2O $\sim$	CH_4, N_2O
10	1390-1480 cm^{-1}	H_2O	H_2O
11	1480-1800 cm^{-1}	H_2O, O_2 $\sim$	H_2O, O_2 $\sim$
12	1800-2080 cm^{-1}	H_2O, CO_2	—
13	2080-2250 cm^{-1}	H_2O, N_2O, CO_2 $\sim$, CO $\sim$	O_3 $\sim$
14	2250-2380 cm^{-1}	CO_2	CO_2
15	2380-2600 cm^{-1}	N_2O, CO_2, H_2O $\sim$, N_2 $\sim$	—
16	2600-3250 cm^{-1}	H_2O, CH_4	CH_4

Methode der korrelierten *k*-Verteilung. In den Sourcecode ist darüber hinaus auch ein Algorithmus bezüglich der Mehrfachstreuung von Langwellenstrahlung implementiert. Dementsprechend kann anhand von RRTM genauso der Langwellenstrahlungstransfer von Atmosphären, welche eine oder mehrere mit Wolken erfüllte Schichten enthalten, quantifiziert werden. Im Rahmen der Sensitivitätsstudie, welche die nächste Sektion zum Inhalt hat, beschränkte ich mich indessen auf Atmosphären, in denen keine Wolken vorhanden sind und somit lediglich Absorption und Emission von Langwellenstrahlung durch Treibhausgase eine Rolle spielen.

Der RRTM-Wellenzahlbereich ist in insgesamt 16 Subintervalle unterteilt. Bei der Erstellung des RRTM-Inputfiles hat man die Möglichkeit, RRTM anzuweisen,

dass es Einstrahlung, Ausstrahlung, Strahlungsflussdichte und die radiative Temperaturänderungsrate nur für ein einzelnes dieser Subintervalle berechnet. Tut man dies nicht, umfasst der Printout stets den gesamten RRTM-Wellenzahlbereich. Von zentraler Relevanz ist in diesem Zusammenhang, dass Absorption und Emission in den meisten der 16 Subintervalle auf mehrere Molekülsorten zurückzuführen sind. RRTM ist in dieser Hinsicht so programmiert, dass pro Subintervall maximal zwei Spezies exakt im Sinne der CKD-Methode behandelt werden.[8] Spezies, mit denen auf diese Weise verfahren wird, werden als primäre Infrarotabsorber bezeichnet. Absorption und Emission seitens der übrigen Spezies (i. e. der so genannten sekundären Infrarotabsorber) werden durch weniger rigorose Algorithmen berücksichtigt. Gemäß Tabelle 3.1 sind insgesamt acht verschiedene Infrarotabsorber in die RRTM-Kalkulationen involviert, nämlich Wasserdampf, Kohlendioxid, Ozon, Lachgas, Methan, Kohlenmonoxid, molekularer Sauerstoff und molekularer Stickstoff. Über diese (grundsätzlich) natürlichen Infrarotabsorber hinaus bezieht RRTM auch vier verschiedene FCKW's ein, nämlich CCl_4 (im Subintervall 5), CFC-11 (im Subintervall 6), CFC-12 (in den Subintervallen 6 und 8) und CFC-22 (im Subintervall 8). Die mit diesen FCKW's assoziierten RRTM-Algorithmen sind jedoch vergleichsweise ungenau. Die Absorptionskoeffizienten der einzelnen RRTM-Molekülsorten liegen in Form von Werten vor, welche auf einem den gesamten Bereich realistischer Atmosphärenzustände abdeckenden Druck-Temperatur-Gitter abgespeichert sind. Zur Durchführung einer konkreten Kalkulation ist natürlich im Allgemeinen Interpolation zwischen den Gitterpunkten notwendig. RRTM verwendet dabei lineare Interpolation mit der Temperatur und dem Logarithmus des Drucks als Interpolationsvariablen. Die abgespeicherten Absorptionskoeffizienten stammen direkt aus dem ebenfalls von AER entwickelten Line-by-Line-Modell LBLRTM (siehe [2]). Dieses repräsentiert in vielerlei Hinsicht die Basis von RRTM und wird somit insbesondere auch zur Evaluierung der von RRTM produzierten Ergebnisse herangezogen.

Abbildung 3.4 illustriert die Abschwächung, der das atmosphärische Langwellenstrahlungsfeld in Zenitrichtung zufolge der individuellen beziehungsweise kollektiven Absorption seitens der sechs wichtigsten Treibhausgase (i. e. H_2O, CO_2, O_3, N_2O, CH_4, CO) zwischen dem Erdboden und dem oberen Atmosphärenrand unterworfen ist. Betrachtet man in diesem Kontext speziell den atmosphärischen Wasserdampf, sticht sofort der ausgeprägte Absorptionseffekt ins Auge, welcher grob im Wellenlängenbereich zwischen 5 und 7 μm auftritt. Tatsächlich befindet sich dort das stärkste H_2O-Absorptionsband, das so genannte 6.3-μm-Band. Das 6.3-μm-Band basiert grundsätzlich auf der Anregung des zweiten in Abbildung 3.5 dargestellten H_2O-Vibrationszustandes. Zu dieser Anregung kommt es im Zuge der Absorption von Lichtquanten bei einer Wellenlänge von 6.25 μm. Die

[8] Siehe dazu Subsektion 2.3.4.

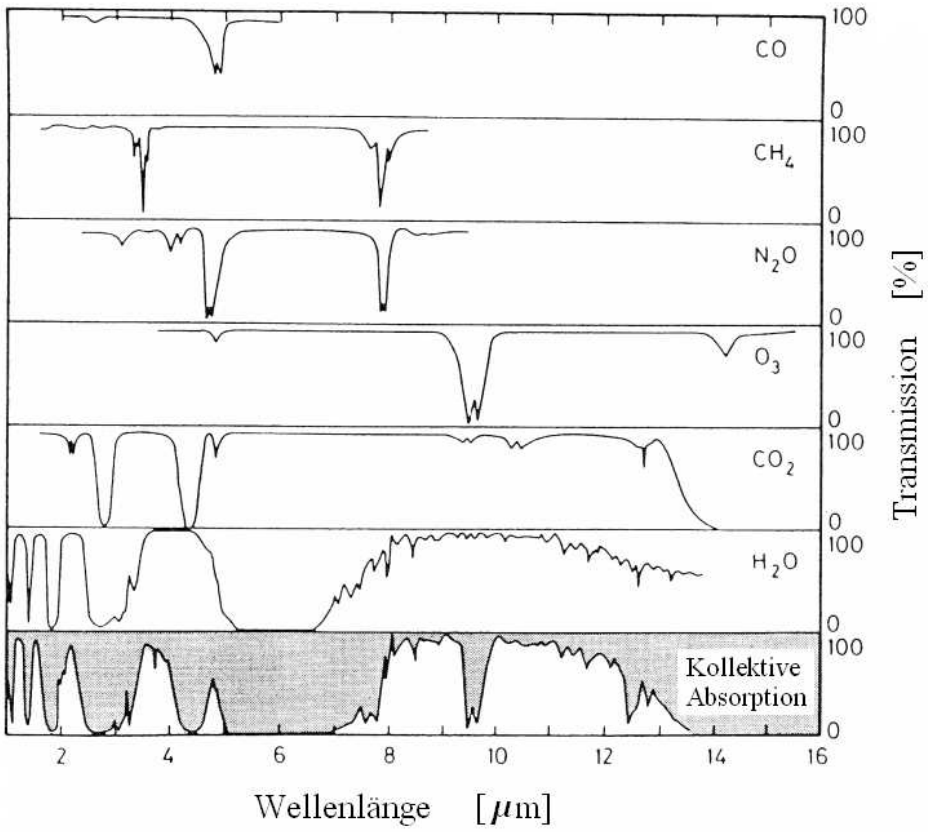


Abbildung 3.4: Transmissionsspektra, welche mit dem Absorptionseffekt der sechs wichtigsten Treibhausgase verbunden sind. Die Transmission entspricht jenem Prozentanteil an der vom Erdboden in Zenitrichtung emittierten Radianz, der am oberen Atmosphärenrand schließlich in den interplanetaren Raum ausgestrahlt wird (übernommen aus [16]).

Bandstruktur bildet sich aus, zumal gleichzeitig mit dem fundamentalen Schwingungsübergang in der Regel stets auch einer von zahlreichen möglichen Rotationsübergängen vonstatten geht. Anzumerken ist an dieser Stelle, dass Rotationsübergänge mit wesentlich kleineren Energieänderungen verknüpft sind als Schwingungsübergänge. Da einer Wellenlänge von 6.25 μm eine Wellenzahl von 1595 cm^{-1} entspricht, liegt das Zentrum des 6.3-μm-Bands im Subintervall 11 des RRTM-Wellenzahlbereichs. Konsequenterweise wird der atmosphärische Wasserdampf gemäß Tabelle 3.1 in diesem sowie in den benachbarten Subintervallen als primärer Infrarotabsorber aufgefasst. Der erste und der dritte H_2O-Vibrationszustand aus Abbildung 3.5 sind ebenso jeweils mit einem Absorptionsband assoziiert. Die Bandzentren befinden sich bei 2.73 beziehungsweise 2.66 μm, i. e. bei

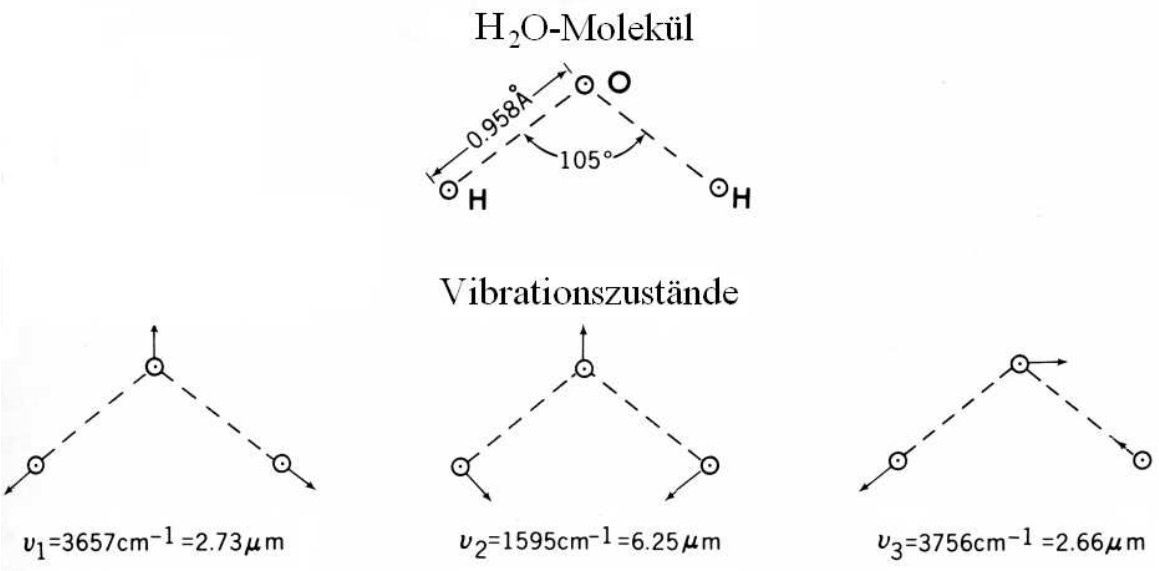


Abbildung 3.5: Vibrationszustände des Wassermoleküls (übernommen aus [10]).

3657 beziehungsweise 3756 cm^{-1}, und liegen damit außerhalb des in RRTM berücksichtigten spektralen Bereichs. Neben den drei Vibrations-Rotationsbändern weist der atmosphärische Wasserdampf schließlich auch noch ein reines Rotationsband auf, welches ähnlich wie das 6.3-μm-Band von fundamentaler Bedeutung für den Langwellenstrahlungstransfer ist. Das H_2O-Rotationsband erstreckt sich von 10 bis 1000 cm^{-1} und umfasst infolgedessen im Prinzip die ersten sechs Subintervalle des RRTM-Wellenzahlbereichs.

Einen Sonderfall hinsichtlich der Absorption von Langwellenstrahlung repräsentiert das sogenannte thermisch-infrarote Fenster. Mit diesem ist der zwischen 800 und 1200 cm^{-1} gelegene Wellenzahlbereich gemeint, in dem Linienabsorption nur kraft des relativ schwachen 9.6-μm-Bands von Ozon erfolgt. Darüber hinaus ist jedoch auch kontinuierliche Absorption beobachtbar, als deren Verursacher im Großen und Ganzen der atmosphärische Wasserdampf identifiziert werden kann. Auch heute noch ist das Wasserdampfkontinuum der 10-μm-Fensterregion mehr oder weniger ein theoretisches Mysterium. Der gängigste Ansatz ist, die mit dem Wasserdampfkontinuum verbundene Absorption als kumulative Absorption zufolge der Flügel von Druck-verbreiterten Wasserdampflinien mit Linienzentren im fernen Infrarot zu deuten. Demzufolge unterscheidet man zwischen dem selbst-verbreiterten Kontinuum, welches auf Zusammenstößen zwischen H_2O-Molekülen beruht, und dem fremd-verbreiterten Kontinuum, welches auf Kollisionen zwischen H_2O-Molekülen und jeglichen anderen Luftmolekülen zurückzuführen ist. RRTM berücksichtigt sowohl das selbst- als auch das fremd-

verbreiterte Kontinuum. Die in RRTM abgespeicherten Absorptionskoeffizienten liefert dabei das Wasserdampfkontinuum-Modell CKD (Version 2.4), welches ein weiteres Produkt von AER darstellt (siehe [2]).

Zum Abschluss dieser Sektion soll noch kurz auf die Erstellung von RRTM-Inputfiles eingegangen werden. Ein Vorteil von RRTM ist zweifellos, dass es dem Benutzer im Hinblick auf die Eingabe der individuellen Atmosphärendaten relativ große Freiheiten gewährt. Auf der einen Seite lässt sich das Inputfile sowohl auf Basis eines Druckgitters als auch auf Basis eines Höhengitters erstellen. Dabei können Atmosphären, welche bis zu 200 Schichten (und damit 201 Druck- beziehungsweise Höhenlevels) umfassen, importiert werden. Was die Eingabe von Werten für Druck, Temperatur und Teilchenkonzentrationen angeht, hat man auf der anderen Seite die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Einheiten auszuwählen. Die Wasserdampfkonzentration beispielsweise kann in Form des Volumenmischungsverhältnisses ([1] beziehungsweise [ppmv]), der Teilchenanzahldichte ([cm^{-3}]), des Massenmischungsverhältnisses ([gkg^{-1}]), der Massendichte ([gm^{-3}]), des Partialdrucks ([mb]), der Taupunkttemperatur ([K] beziehungsweise [°C]) wie auch der relativen Feuchte [%]) eingegeben werden.

Im Rahmen der in der nächsten Sektion präsentierten Sensitivitätsstudie erstellte ich RRTM-Inputfiles stets in der Standardform. Erforderlich ist hierzu zunächst die Eingabe der Bodentemperatur (in K), der Anzahl der Atmosphärenschichten sowie der höchsten Molekülsortennummer.[9] In der weiteren Folge muss man dann jeder Atmosphärenschicht einen Wert für den mittleren Druck/die mittlere Temperatur der Schicht (in mb/in K), einen Wert für den Druck/die Temperatur am oberen Randlevel der Schicht (in mb/in K), Werte für die (dimensionslosen) Volumenmischungsverhältnisse der betrachteten Infrarotabsorber am oberen Randlevel der Schicht sowie einen Wert für die Gesamtteilchenanzahl der Schicht (in cm^{-2}) zuweisen. Für die unterste Atmosphärenschicht muss darüber hinaus auch ein Wert für den Druck/die Temperatur am unteren Randlevel der Schicht (in mb/in K) eingegeben werden. Die Ausgabe der von RRTM berechneten Werte für Einstrahlung, Ausstrahlung, Strahlungsflussdichte und die radiative Temperaturänderungsrate erfolgt letzten Endes auf demselben Druckgitter, welches im Inputfile festgelegt wurde.

[9] Die Identifikation der in RRTM berücksichtigten Infrarotabsorber erfolgt anhand individueller Nummern.

3.3 H_2O-Sensitivität des LW-Strahlungstransfers

In dieser Sektion sollen die Ergebnisse der Studie präsentiert werden, die ich anhand von RRTM hinsichtlich der Sensitivität des Langwellenstrahlungstransfers zu Änderungen der Wasserdampfkonzentration durchgeführt habe. Ich verwendete dabei vier Standardatmosphären, nämlich die TRO-Atmosphäre ("Tropical Atmosphere"), die MLS-Atmosphäre ("Mid-Latitude Summer Atmosphere"), die MLW-Atmosphäre ("Mid-Latitude Winter Atmosphere") und die SAW-Atmosphäre ("Subarctic Winter Atmosphere"). Wie bereits in Sektion 3.1 erwähnt, stammen die Daten zu diesen Standardatmosphären aus Beispielinputfiles, die dem Sourcecode von RRTM beigefügt sind. Aus Tabelle 3.2 und Abbildung 3.6 geht hervor, dass der TRO-, MLS-, MLW- und SAW-Atmosphäre sehr unterschiedliche atmosphärische Bedingungen zugrunde liegen. Die Betrachtung einer möglichst großen Bandbreite von realistischen Atmosphärenzuständen ist natürlich ein entscheidendes Kriterium, wenn es darum geht, die Wasserdampfsensitivität des Langwellenstrahlungstransfers schlüssig aufzuzeigen. Was die Unterschiede zwischen den vier Standardatmosphären betrifft, ist im Besonderen darauf hinzuweisen, dass der Bodenwert des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses in der TRO-Atmosphäre rund 18-mal so groß ist wie in der SAW-Atmosphäre. Die TRO-Atmosphäre weist darüber hinaus nicht nur die höchste Bodentemperatur, sondern auch die niedrigste Tropopausentemperatur auf. Die Ausprägung der Tropopause als lokales Temperaturminimum fällt ebenfalls in der TRO-Atmosphäre am deutlichsten aus. Beachtenswert ist schließlich noch die Temperaturinversion, die dem vertikalen Temperaturverlauf der SAW-Atmosphäre in Bodennähe innewohnt. Derentwegen befindet sich das troposphärische SAW-Temperaturmaximum nicht am Erdboden, sondern in einer Höhe von rund 900 m (894.1 mb), und hat einen Wert, der denjenigen der SAW-Bodentemperatur um 1.8 K überschrei-

Tabelle 3.2: Allgemeine Kenndaten zu den vier Standardatmosphären. p_0 ist der Bodendruck, T_0 die Bodentemperatur, $r_{V,0}$ der Bodenwert des Volumenmischungsverhältnisses von H_2O, p_{TP} der Tropopausendruck, z_{TP} die Tropopausenhöhe und T_{TP} die Tropopausentemperatur.

Atmosphäre	p_0	T_0	$r_{V,0}$	p_{TP} (z_{TP})	T_{TP}
TRO	1013.0 mb	300.0 K	2.56%	109.6 mb (15.6 km)	196.4 K
MLS	1013.0 mb	294.2 K	1.59%	162.9 mb (12.8 km)	215.7 K
MLW	1018.0 mb	272.2 K	0.42%	251.9 mb (9.8 km)	219.6 K
SAW	1013.0 mb	257.2 K	0.14%	276.0 mb (9.1 km)	217.2 K

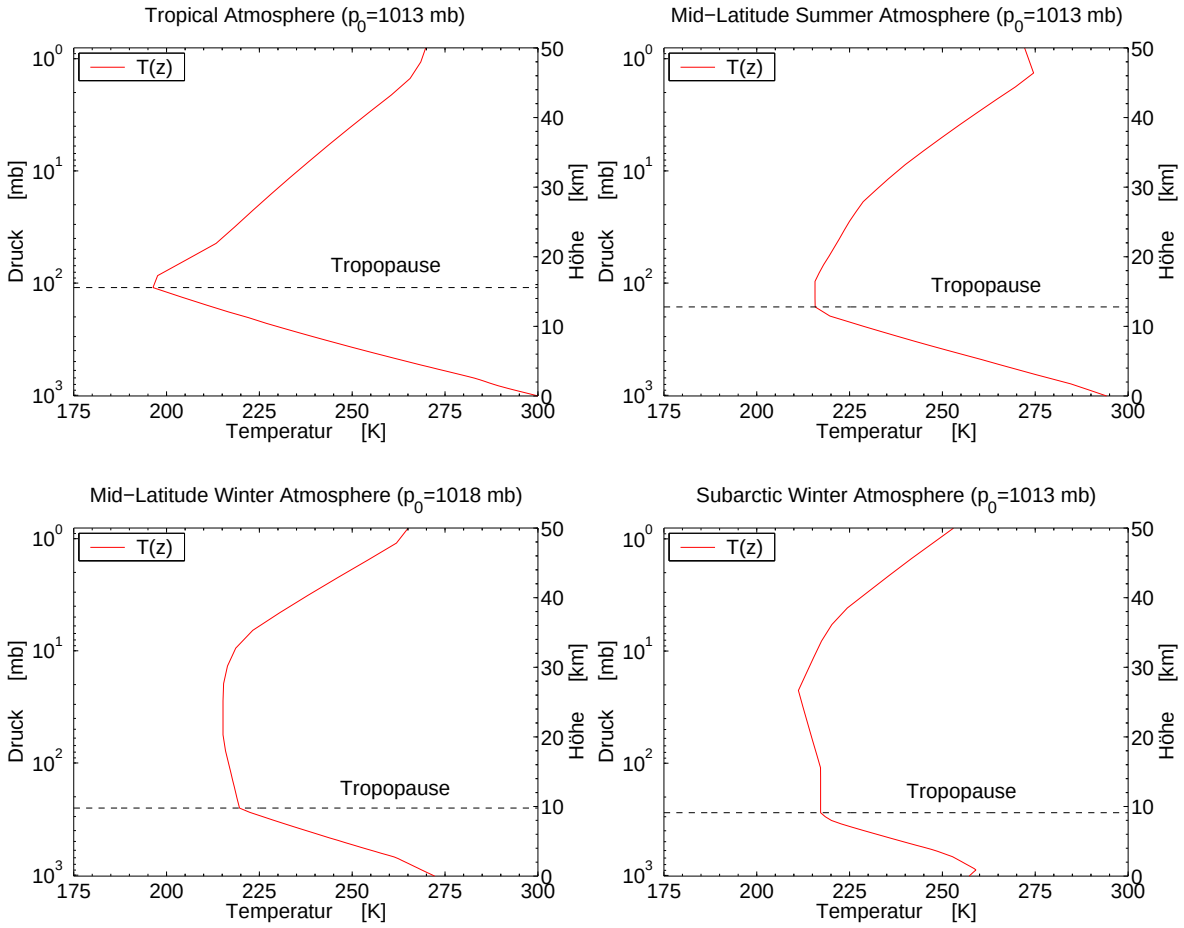


Abbildung 3.6: Vertikaler Temperaturverlauf für die vier Standardatmosphären.

tet.

Die nachfolgende Darstellung zur Wasserdampfsensitivität des Langwellenstrahlungstransfers ist grundsätzlich in drei Abschnitte unterteilt. Abschnitt 1 und Abschnitt 2 haben die prinzipielle Bedeutung des atmosphärischen Wasserdampfs für den Langwellenstrahlungstransfer zum Inhalt. Infolgedessen wird zunächst für jede der vier Standardatmosphären gezeigt, wie sich Einstrahlung, Ausstrahlung und Strahlungsflussdichte ändern, wenn das H_2O-Volumenmischungsverhältnis in allen Höhen gleich null gesetzt wird. Danach wird auch die Sensitivität der radiativen Temperaturänderungsrate zu einer vollständigen Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs demonstriert. Abschnitt 3 geht schließlich anhand der MLS-Atmosphäre der Frage nach, inwieweit sich eine 20%-ige Abnahme beziehungsweise eine 20%-ige Zunahme des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses auf Einstrahlung, Ausstrahlung, Strahlungsflussdichte und die radiative Temperaturänderungsrate auswirkt. Die Erhöhung des H_2O-Volumenmischungsverhältnis-

ses um 20% kann dabei als Wasserdampf-Feedback des Klimasystems verstanden werden, welches, wie in Sektion 3.1 kurz diskutiert wurde, den vorab nur mit steigender Kohlendioxidkonzentration verknüpften anthropogenen Treibhauseffekt verstärkt.

Einstrahlung, Ausstrahlung, Strahlungsflussdichte und die radiative Temperaturänderungsrate umfassen in der weiteren Folge stets jeweils den gesamten Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung und werden folglich mit F_{LW}^{+}, F_{LW}^{-}, F_{LW} und $(\partial T/\partial t)_{\mathrm{LW}}$ bezeichnet. Wie in der vorhergehenden Sektion festgehalten wurde, erstreckt sich der Wellenzahlbereich der Langwellenstrahlung im Falle von RRTM von 10 bis 3250 cm^{-1}. Dies entspricht einem Wellenlängenbereich von 3.1 bis 1000 μm. Es sollte an dieser Stelle noch einmal daran erinnert werden, dass die Strahlungsflussdichte zufolge von (2.72) als Nettoausstrahlung definiert ist und sich damit als

$$F_{\mathrm{LW}} = F_{\mathrm{LW}}^{+} - F_{\mathrm{LW}}^{-} \tag{3.11}$$

schreibt. Außerdem wird hier aus praktischen Gründen durchgehend statt der Heizrate (i. e. statt $(\partial T/\partial t)_{\mathrm{LW}}$) die Kühlrate (i. e. $-(\partial T/\partial t)_{\mathrm{LW}}$) verwendet. Letztere soll dabei der Einfachheit halber mit C_{LW} bezeichnet werden:

$$C_{\mathrm{LW}} = -\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\mathrm{LW}}. \tag{3.12}$$

Zwecks Quantifizierung der Sensitivität von F_{LW}^{+}, F_{LW}^{-}, F_{LW} und C_{LW} ist es naheliegend, sowohl die absoluten als auch die relativen Differenzen zu betrachten, welche sich in diesen Größen zufolge einer Modifikation der Wasserdampfkonzentration ergeben. Als Referenz dienen dabei stets diejenigen vertikalen F_{LW}^{+}-, F_{LW}^{-}-, F_{LW}- und C_{LW}-Profile, welche mit den vier Originalstandardatmosphären assoziiert sind. In diesem Sinne gilt

$$\Delta F_{\mathrm{LW}}^{(\pm)} = F_{\mathrm{LW,mod}}^{(\pm)} - F_{\mathrm{LW,org}}^{(\pm)}, \tag{3.13}$$

$$\Delta C_{\mathrm{LW}} = C_{\mathrm{LW,mod}} - C_{\mathrm{LW,org}} \tag{3.14}$$

und

$$(\Delta F_{\mathrm{LW}}^{(\pm)})_{\mathrm{rel}} = \frac{\Delta F_{\mathrm{LW}}^{(\pm)}}{F_{\mathrm{LW,org}}^{(\pm)}}, \tag{3.15}$$

$$(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}} = \frac{\Delta C_{\mathrm{LW}}}{|C_{\mathrm{LW,org}}|}, \tag{3.16}$$

wobei “org” die Originalstandardatmosphäre und “mod” die modifizierte Standardatmosphäre meint. Was letzten Endes noch anzumerken bleibt, ist, dass alle

in der weiteren Folge präsentierten Plots einen einheitlichen Höhenbereich umfassen, welcher sich von 0 bis 50 km Höhe erstreckt. Gemäß Abbildung 3.6 fällt das 50-km-Level in etwa mit dem 0.8-mb-Niveau zusammen und liegt je nach Standardatmosphäre entweder knapp unterhalb oder knapp oberhalb der Stratopause.

Abschnitt 1

Abbildung 3.7 zeigt den vertikalen Verlauf von F_{LW}^{+}, F_{LW}^{-} und F_{LW} für die vier Standardatmosphären. Wie unter Einbeziehung von Tabelle 3.3 ersichtlich wird, ist der F_{LW}^{+}-Bodenwert in der TRO-Atmosphäre um einiges größer als in den übrigen drei Standardatmosphären. Dies beruht natürlich auf der Tatsache, dass die TRO-Atmosphäre von allen vier Standardatmosphären die höchste Bodentemperatur hat. Der SAW-Bodenwert von F_{LW}^{+} zum Beispiel macht nur rund 54% des entsprechenden TRO-Werts aus. Da die TRO-Atmosphäre wesentlich mehr Wasserdampf enthält als die drei übrigen Standardatmosphären, weist sie ebenso den weitaus größten F_{LW}^{-}-Bodenwert auf. Der F_{LW}^{-}-Bodenwert kann nun im Prinzip als Indikator für die Stärke des Treibhauseffekts angesehen werden. Deswegen ist klar, dass der prozentuelle Unterschied zwischen dem TRO- und dem SAW-Wert von F_{LW}^{+} am 50-km-Level geringer ausfällt als am Erdboden. Tatsächlich macht der SAW-Wert von F_{LW}^{+} am 50 km-Level[10] rund 69% des entsprechenden TRO-Werts aus. Was die SAW-Atmosphäre angeht, ist schließlich beachtenswert, dass die in Bodennähe auftretende Temperaturinversion sich zwar sowohl im Höhenprofil von F_{LW}^{+} als auch im Höhenprofil von F_{LW}^{-} manifestiert. Ein echtes Maximum bildet sich jedoch nur im Höhenprofil von F_{LW}^{+} aus. Dieses liegt in derselben Höhe wie das Temperaturmaximum und hat einen Wert, der den F_{LW}^{+}-Bodenwert um 2.8 Wm^{-2} übersteigt. Wie in [15] herausgestrichen wird, weist in Inversionssituationen generell auch das Höhenprofil von F_{LW}^{-} ein Maximum im Bereich

Tabelle 3.3: Kenndaten zu den Höhenprofilen von Einstrahlung, Ausstrahlung und Strahlungsflussdichte (Nettoausstrahlung) aus Abbildung 3.7.

Atmosphäre	$F_{\mathrm{LW}}^{+}(0\ \mathrm{km})$	$F_{\mathrm{LW}}^{-}(0\ \mathrm{km})$	$F_{\mathrm{LW}}(50\ \mathrm{km})$
TRO	459.3 Wm^{-2}	396.9 Wm^{-2}	286.6 Wm^{-2}
MLS	424.8 Wm^{-2}	348.0 Wm^{-2}	280.9 Wm^{-2}
MLW	311.3 Wm^{-2}	223.5 Wm^{-2}	229.9 Wm^{-2}
SAW	248.1 Wm^{-2}	172.0 Wm^{-2}	198.6 Wm^{-2}

[10] Es ist darauf hinzuweisen, dass der F_{LW}^{+}-Wert am 50-km-Level für alle vier Standardatmosphären bereits um weniger als 1 Wm^{-2} vom F_{LW}-Wert abweicht.

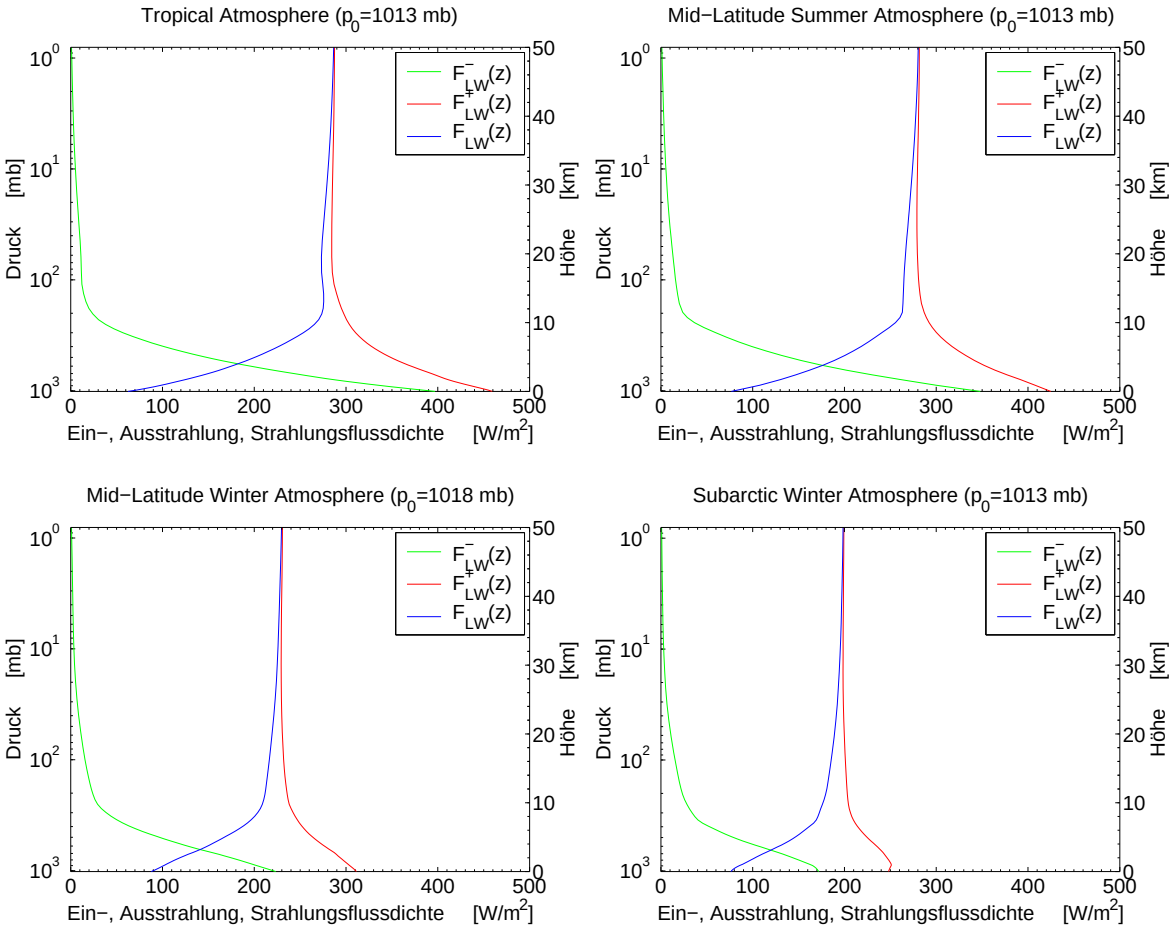


Abbildung 3.7: Vertikaler Verlauf von Einstrahlung, Ausstrahlung und Strahlungsflussdichte (Nettoausstrahlung) für die vier Standardatmosphären.

des Temperaturmaximums auf. Aus der dortigen Diskussion geht überdies hervor, dass im Falle einer Temperaturinversion dem berechneten bodennahen F^-_{LW}-Profil relativ große Diskretisierungsfehler innewohnen können. Diese sind vielleicht dafür verantwortlich, dass in der hiesigen SAW-Atmosphäre ein über dem Erdboden liegendes F^-_{LW}-Maximum fehlt.

Abbildung 3.8 und Abbildung 3.9 liefern die Höhenprofile der absoluten und relativen Flussdifferenzen, welche sich ergeben, wenn in jeder der vier Standardatmosphären das H_2O-Volumenmischungsverhältnis gleich null gesetzt wird. Die mit der vollständigen Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs verknüpften Auswirkungen auf den Treibhauseffekt sind, wie anhand der $(\Delta F^-_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}$-Bodenwerte aus Tabelle 3.4 deutlich wird, dramatisch. Dabei verringert sich erwartungsgemäß der F^-_{LW}-Bodenwert prozentuell umso mehr, je größer der Wasserdampfgehalt der Originalstandardatmosphäre ist. Ungeachtet dessen ist auch nach dem

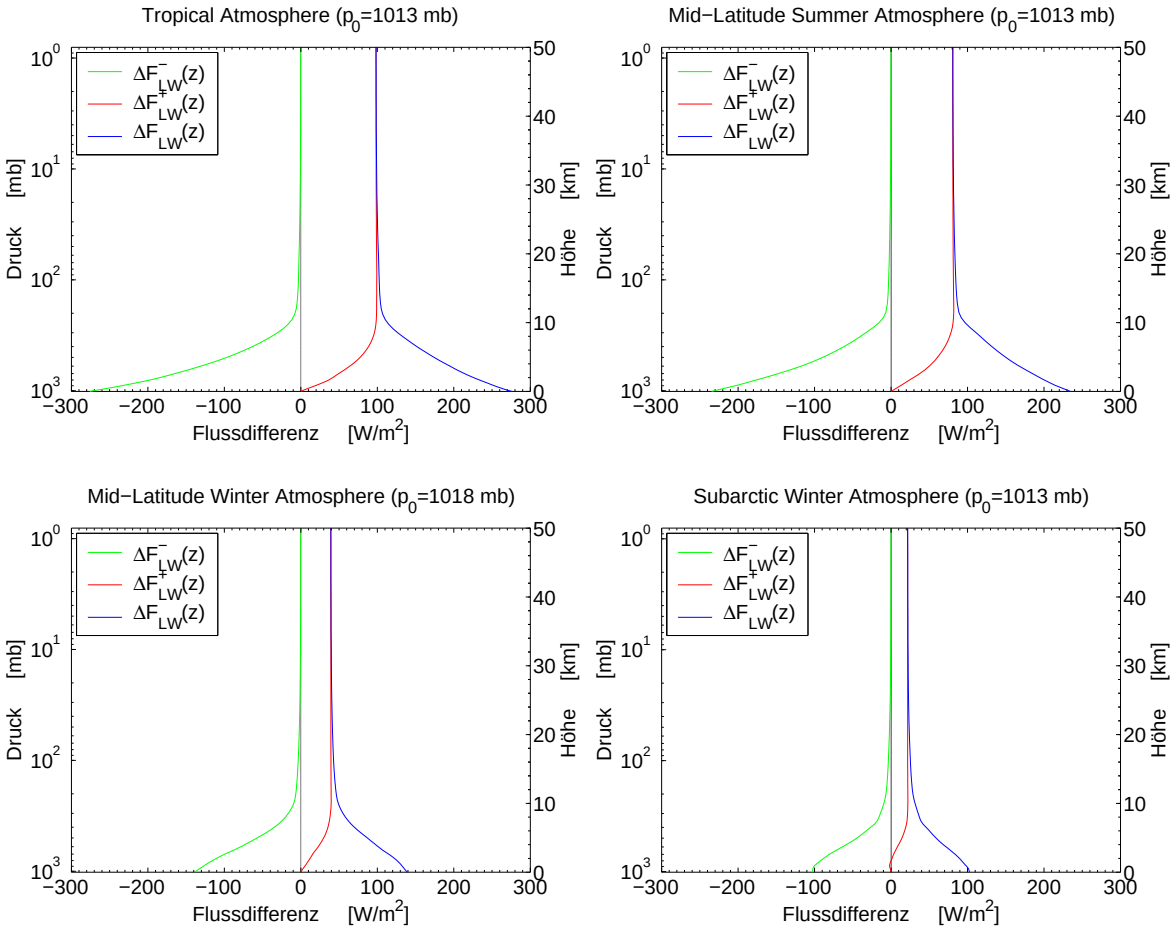


Abbildung 3.8: Höhenprofile der absoluten Flussdifferenzen bei vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs.

Nullsetzen des H_2O-Mischungsverhältnisses die TRO-Atmosphäre diejenige Standardatmosphäre mit dem stärksten Treibhauseffekt, zumal sie weiterhin die höchste Bodentemperatur aufweist. Die Verringerung des F^-_{LW}-Bodenwerts geht in der weiteren Folge natürlich mit einer Erhöhung der Nettoausstrahlung am 50-km-Level einher. Die prozentuelle Zunahme des F_{LW}-Werts am 50-km-Level fällt jedoch für jede der vier Standardatmosphären deutlich schwächer aus als die prozentuelle Abnahme des F^-_{LW}-Bodenwerts. Was den vertikalen Verlauf der relativen F^-_{LW}-Differenz betrifft, sticht die sattelförmige Struktur ins Auge, die prinzipiell in allen Plots von Abbildung 3.9 in der oberen Troposphäre und der unteren Stratosphäre zu beobachten ist. Betrachtet man in diesem Zusammenhang beispielsweise die TRO-Atmosphäre, stellt man konkret fest, dass der Betrag der relativen F^-_{LW}-Differenz bis in eine Höhe von rund 6 km nur um 10% kleiner wird, dann aber bis in eine Höhe von rund 15 km plötzlich um weitere 50% abnimmt.

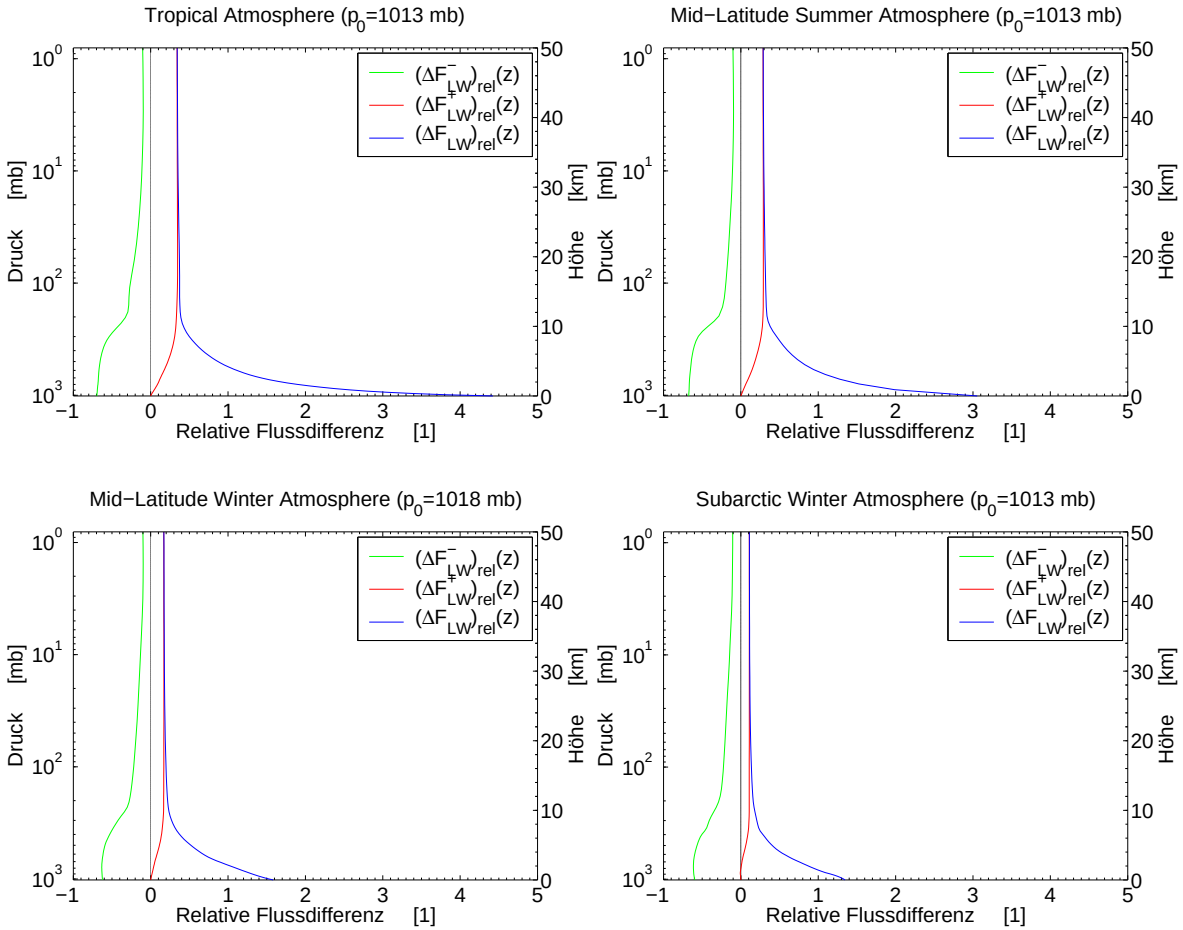


Abbildung 3.9: Höhenprofile der relativen Flussdifferenzen bei vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs.

Dies ist dadurch zu erklären, dass der atmosphärische Wasserdampf, wie bereits in Sektion 3.1 diskutiert wurde,[11] fast zur Gänze auf den unteren und mittleren Bereich der Troposphäre konzentriert ist. Dementsprechend büßt er ab der oberen Troposphäre relativ rasch seine zunächst dominante Rolle im Rahmen des Treibhauseffekts zugunsten von Kohlendioxid ein. Das CO_2-Volumenmischungsverhältnis ist am Erdboden zwar um zumindest eine Größenordnung kleiner als das H_2O-Volumenmischungsverhältnis. Es bleibt jedoch gemäß Tabelle 1.1 ganz im Gegensatz zum H_2O-Volumenmischungsverhältnis über die gesamte Homosphäre hinweg praktisch konstant. Weiters ist zu beachten, dass der Bodenwert der absoluten F^+_{LW}-Differenz –und folglich auch der Bodenwert der relativen F^+_{LW}-Differenz– für jede der vier Standardatmosphären gleich null ist. Dies kommt natürlich von

[11] Siehe dazu insbesondere Abbildung 3.1.

Tabelle 3.4: Kenndaten zu den Höhenprofilen der absoluten und relativen Flussdifferenzen aus Abbildung 3.8 und Abbildung 3.9.

Atmosphäre	$\Delta F_{\mathrm{LW}}^{-}(0\ \mathrm{km})$	$(\Delta F_{\mathrm{LW}}^{-})_{\mathrm{rel}}(0\ \mathrm{km})$	$\Delta F_{\mathrm{LW}}(50\ \mathrm{km})$	$(\Delta F_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}(50\ \mathrm{km})$
TRO	-276.0 Wm^{-2}	-69.5%	98.2 Wm^{-2}	34.2%
MLS	-234.7 Wm^{-2}	-67.4%	80.7 Wm^{-2}	28.7%
MLW	-139.1 Wm^{-2}	-62.2%	39.2 Wm^{-2}	17.1%
SAW	-102.5 Wm^{-2}	-59.6%	21.8 Wm^{-2}	11.0%

daher, dass die Langwellenstrahlungsemission des Erdbodens nur von der Bodentemperatur abhängt. Was die Höhenprofile der absoluten und relativen Flussdifferenzen in der SAW-Atmosphäre betrifft, ist letzten Endes noch interessant, dass auch in diesen die Temperaturinversion ihren Niederschlag findet. Die vollständige Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs wirkt sich dabei konsequenterweise in einer Abschwächung des mit der Temperaturinversion verknüpften F_{LW}^{+}-Maximums aus.

Abschnitt 2

Abbildung 3.10 zeigt den vertikalen Verlauf von C_{LW} für die vier Standardatmosphären. Inspiziert man die mit der TRO- und der MLS-Atmosphäre verknüpften Plots, fällt sofort die ausgeprägte Minimumstruktur auf, die jedem der beiden C_{LW}-Profile im Bereich der Tropopause innewohnt (siehe dazu auch Tabelle 3.5). Um eine Erklärung für diese Minimumstruktur zu finden, muss man sich (2.105) in Erinnerung rufen. Wie im Rahmen der Diskussion dieser Gleichung

Tabelle 3.5: Kenndaten zu den Höhenprofilen der Kühlrate aus Abbildung 3.10. $C_{\mathrm{LW,min}}$ ist das Minimum der Kühlrate im Höhenbereich zwischen 0 und 50 km.

Atmosphäre	$C_{\mathrm{LW,min}}$
TRO	-0.48 K/d $\rightarrow$ 109.6 mb (15.6 km)
MLS	0.10 K/d $\rightarrow$ 162.9 mb (12.8 km)
MLW	0.34 K/d $\rightarrow$ 184.3 mb (12.0 km)
SAW	0.43 K/d $\rightarrow$ 1013.0 mb (0.0 km)

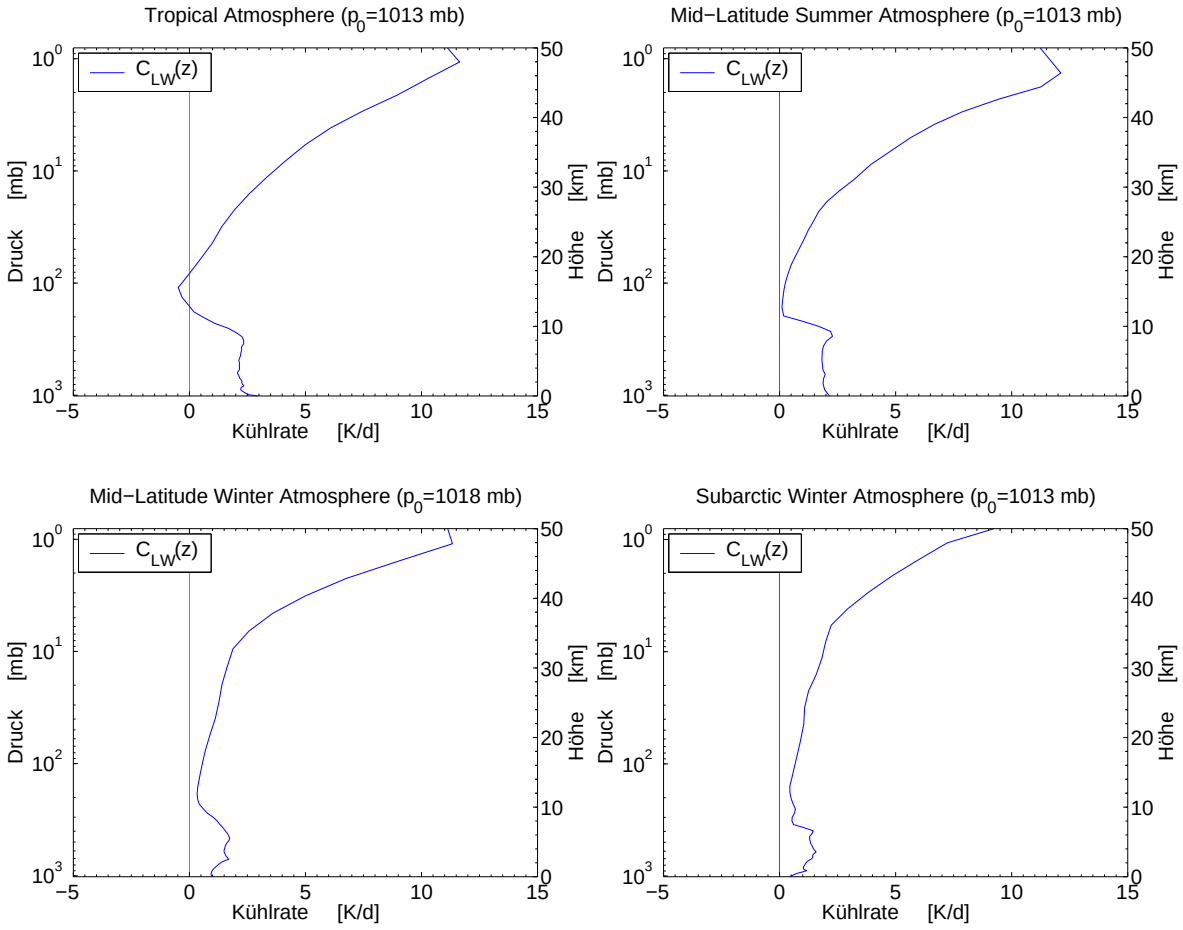


Abbildung 3.10: Vertikaler Verlauf der Kühlrate für die vier Standardatmosphären.

herausgearbeitet wurde, setzt sich der mathematische Ausdruck für die radiative Temperaturänderungsrate aus vier Termen zusammen, nämlich dem Cooling-to-Space-Term sowie drei weiteren Termen, die den Energieaustausch zwischen dem betrachteten Höhenlevel und den darunter beziehungsweise darüber liegenden Höhenlevels betreffen. Bezieht man sich, wie es hier durchwegs der Fall ist, auf die negative Temperaturänderungsrate, dann ist der Cooling-to-Space-Term stets positiv. Jeder einzelne der übrigen drei Terme weist wiederum genau dann ein negatives Vorzeichen auf, wenn die Temperatur am betrachteten Höhenlevel ein Minimum darstellt. Tatsächlich wird die Tropopausentemperatur im Falle der TRO- und der MLS-Atmosphäre bis weit in die Mesosphäre hinein nirgendwo unterschritten. Dies hat zur Folge, dass das Cooling-to-Space im Bereich der Tropopause durch den Energieaustausch mit den darüber und darunter liegenden wärmeren Höhenlevels effektiv abgeschwächt wird. In der TRO-Atmosphäre,

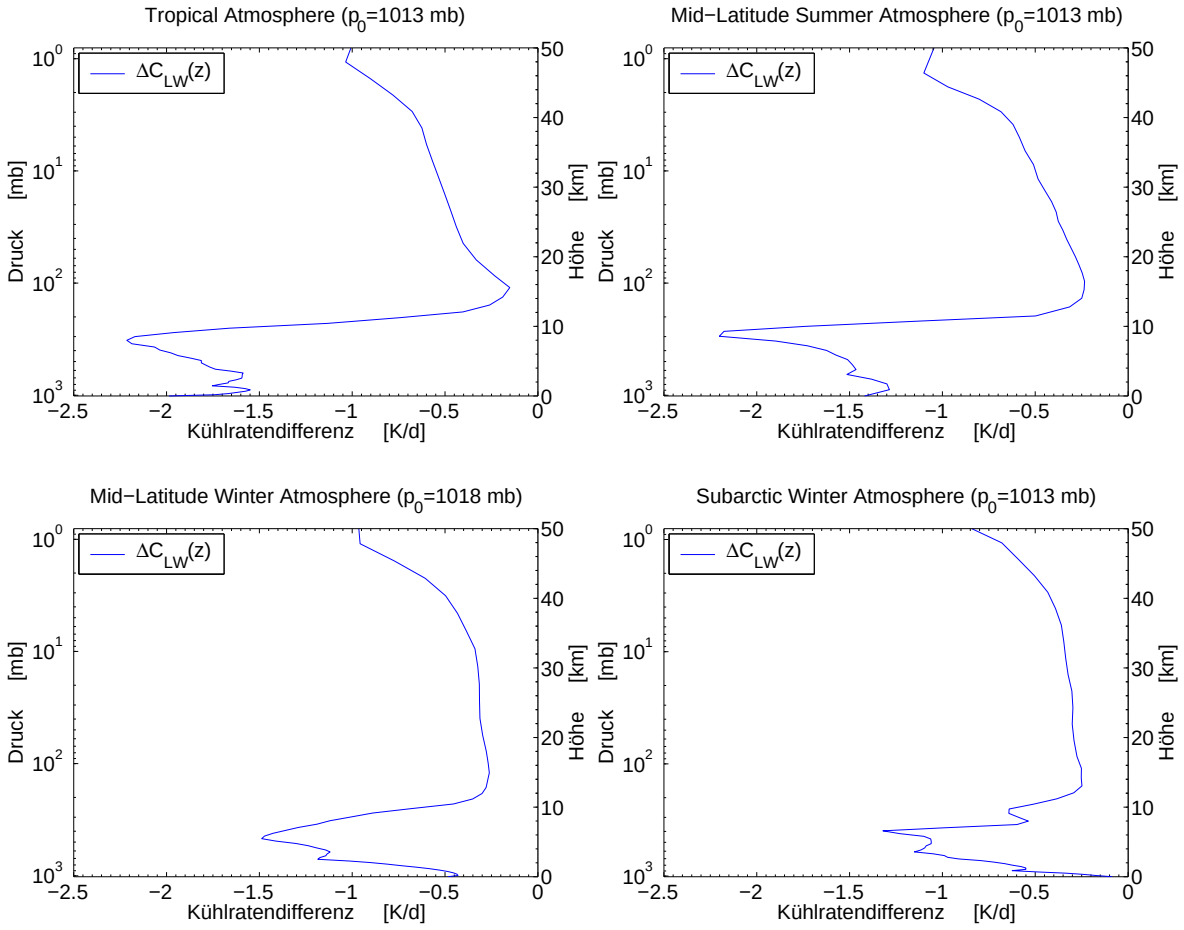


Abbildung 3.11: Höhenprofile der absoluten Kühlratendifferenz bei vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs.

die sich gemäß Abbildung 3.6 durch eine besonders scharfe Tropopausenstruktur auszeichnet, wird das Cooling-to-Space sogar überkompensiert, woraufhin im Bereich der Tropopause eine negative Kühlrate und damit radiative Erwärmung zu beobachten ist. Auch in der MLW- und SAW-Atmosphäre kann grundsätzlich ein C_{LW}-Minimum im Bereich der Tropopause ausgemacht werden. Wegen der unscharfen Tropopausenstruktur und des vergleichsweise geringen Unterschieds zwischen Bodentemperatur und Tropopausentemperatur ist dieses in beiden Fällen jedoch nur relativ schwach ausgeprägt. Was den vertikalen Verlauf von C_{LW} in der SAW-Atmosphäre angeht, muss schließlich noch auf die Auswirkungen der bodennahen Temperaturinversion hingewiesen werden. Diese manifestiert sich einerseits in einem lokalen C_{LW}-Maximum, welches am selben Höhenlevel wie das Temperaturmaximum liegt, und andererseits in einem C_{LW}-Minimum am Erdboden. Jede dieser beiden Beobachtungen lässt sich wiederum mit Hilfe der

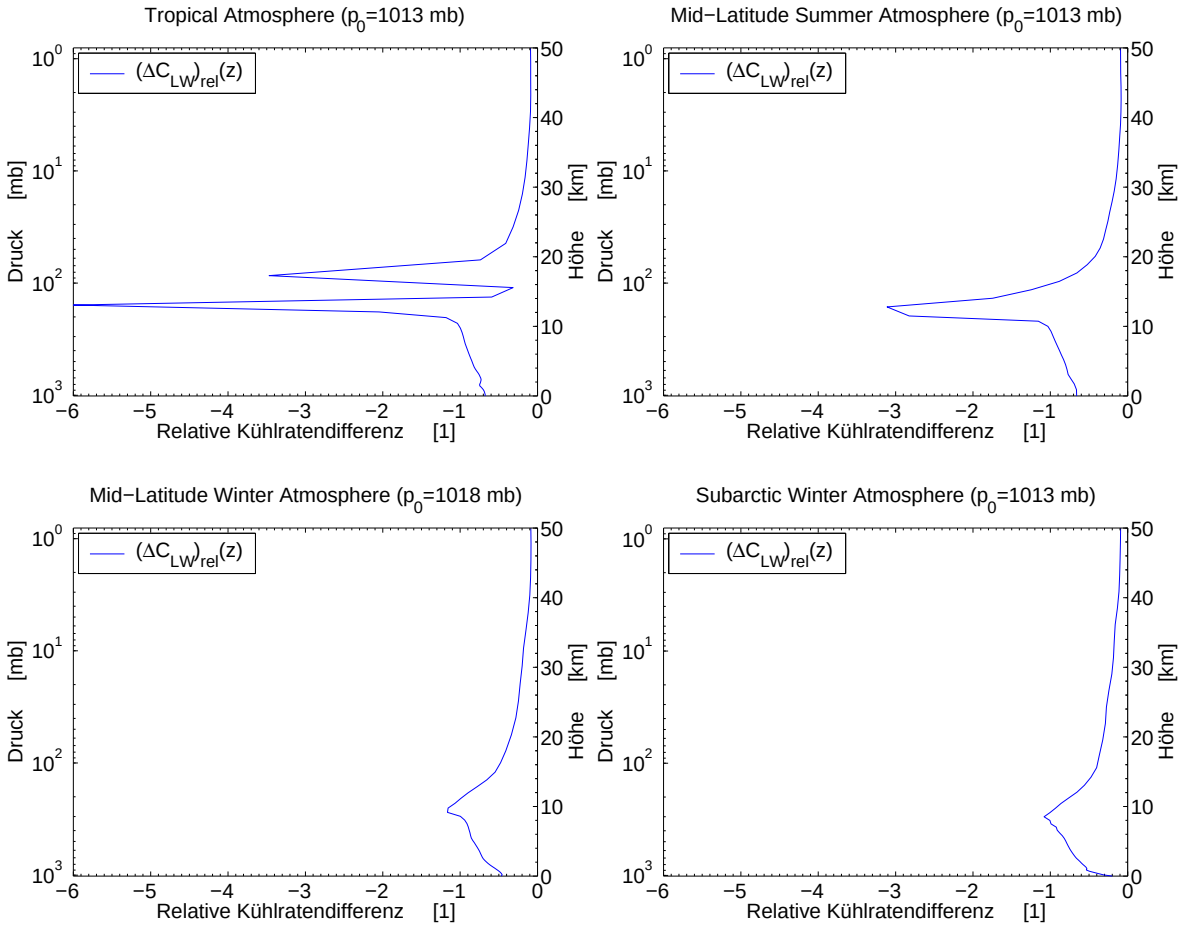


Abbildung 3.12: Höhenprofile der relativen Kühlratendifferenz bei vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs.

bei der Diskussion von (2.105) vorgebrachten Argumente erklären.

Abbildung 3.11 und Abbildung 3.12 enthalten die Höhenprofile der absoluten und relativen Kühlratendifferenz, welche man bekommt, wenn wiederum in jeder der vier Standardatmosphären der atmosphärische Wasserdampf vollständig entfernt wird. Wie am leichtesten anhand der Plots zum vertikalen Verlauf der relativen C_{LW}-Differenz ersichtlich wird, hat das Nullsetzen des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses massive Auswirkungen auf die troposphärischen Kühlraten. Die ziemlich großen Kühlraten, die gemäß Abbildung 3.10 in der unteren und mittleren Troposphäre auftreten und die sich vor allem in der TRO- und der MLS-Atmosphäre durch eine relativ geringe Höhenvariabilität auszeichnen, unterliegen einer drastischen Abschwächung. Im Höhenbereich zwischen dem Erdboden und dem Minimum der absoluten C_{LW}-Differenz (siehe dazu auch Tabelle 3.6) beträgt die mittlere prozentuelle Abnahme der Kühlrate 78.3% im Falle

der TRO-Atmosphäre, 80.6% im Falle der MLS-Atmosphäre, 65.8% im Falle der MLW-Atmosphäre und 63.7% im Falle der SAW-Atmosphäre. In der oberen Troposphäre liegen die $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}$-Werte für alle vier Standardatmosphären dann zum Teil sogar jenseits von -100%. Dies bedeutet, dass nach vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs nicht nur in der TRO-Atmosphäre, sondern auch in den drei übrigen Standardatmosphären radiative Erwärmung im Bereich der Tropopause zu beobachten ist. Was in diesem Zusammenhang natürlich noch auffällt, ist die seltsame Struktur, welche dem mit der TRO-Atmosphäre assoziierten $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}$-Profil innewohnt. Die beiden stark ausgeprägten $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}$-Minima beruhen jedoch nur darauf, dass in der originalen TRO-Atmosphäre an zwei Höhenlevels, von denen eines knapp unterhalb und das andere knapp oberhalb der Tropopause liegt, Kühlraten mit ganz schwach negativen Werten auftreten. Unter Einbeziehung von Abbildung 3.11 wird klar, dass betragsmäßig sehr kleine C_{LW}-Werte im Zuge des Nullsetzens des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses in jedem Fall einer hohen prozentuellen Abnahme unterliegen. Die Synthese der bislang in diesem Absatz präsentierten Argumente ist, dass der atmosphärische Wasserdampf zweifellos hauptverantwortlich für die radiative Abkühlung in der Troposphäre zeichnet. Die Auswirkungen fehlenden Wasserdampfs auf den stratosphärischen Höhenverlauf von C_{LW} werden indessen, wie aus Abbildung 3.12 zu folgern ist, mit zunehmender Höhe rasch kleiner. Aus diesem Grund sind die großen Kühlraten, welche gemäß Abbildung 3.10 in der mittleren und oberen Stratosphäre beobachtet werden können, primär auf Kohlendioxid zurückzuführen. Was letzten Endes noch bleibt, ist ein weiteres Mal auf die SAW-Atmosphäre zurückzukommen. Denn sowohl das Höhenprofil der absoluten C_{LW}-Differenz als auch das Höhenprofil der relativen C_{LW}-Differenz enthält eine Signatur der bodennahen Temperaturinversion, und zwar jeweils in Form eines lokalen Minimums. Dementsprechend ist die mit der Temperaturinversion verknüpfte lokale Maximumstruktur im C_{LW}-Profil nach vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs schwächer ausgeprägt.

Abschnitt 3

Abbildung 3.13 zeigt die Höhenprofile der absoluten und relativen Flussdifferenzen, die sich ergeben, wenn sich das H_2O-Volumenmischungsverhältnis in der MLS-Atmosphäre zum einen um 20% verringert (siehe die oberen zwei Plots) und zum anderen um 20% erhöht (siehe die unteren zwei Plots). Die 20%-ige Abnahme der Wasserdampfkonzentration geht natürlich mit einer entsprechenden Abschwächung des Treibhauseffekts einher. Durch Vergleich von Tabelle 3.7 mit Tabelle 3.4 stellt man fest, dass die Abnahme des F_{LW}^{-}-Bodenwerts jedoch um rund 95% geringer ausfällt als im Falle vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs. Ähnliches gilt für die mit der Verringerung des F_{LW}^{-}-Bodenwerts

Tabelle 3.6: Kenndaten zu den Höhenprofilen der absoluten und relativen Kühlratendifferenz aus Abbildung 3.11 und Abbildung 3.12. $\Delta C_{\mathrm{LW,min}}$ ist das Minimum der absoluten Kühlratendifferenz und $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel,min}}$ das Minimum der relativen Kühlratendifferenz im Höhenbereich zwischen 0 und 50 km.

Atmosphäre	$\Delta C_{\mathrm{LW,min}}$	$(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel,min}}$
TRO	-2.21 K/d → 323.5 mb (8.0 km)	-599.9% → 156.8 mb (13.1 km)
MLS	-2.20 K/d → 297.5 mb (8.6 km)	-311.1% → 162.9 mb (12.8 km)
MLW	-1.49 K/d → 465.7 mb (5.5 km)	-116.3% → 275.3 mb (9.2 km)
SAW	-1.32 K/d → 394.9 mb (6.6 km)	-108.2% → 299.8 mb (8.5 km)

assoziierte Zunahme des F_{LW}-Werts am 50-km-Level. Diese macht konsequenterweise nur etwa 5% der Erhöhung aus, welche der F_{LW}-Wert am 50-km-Level beim Nullsetzen des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses erfährt. Was den vertikalen Verlauf der relativen F_{LW}^{-}-Differenz betrifft, ist überdies interessant, dass deren Betrag nicht monoton mit der Höhe abnimmt, wie es gemäß Abbildung 3.9 bei vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs zutrifft, sondern in der oberen Troposphäre ein absolutes Maximum erreicht.

Stellt man in der weiteren Folge in Abbildung 3.13 die beiden unteren Plots den beiden oberen Plots gegenüber, könnte man auf den ersten Blick meinen, dass die 20%-ige Zunahme der Wasserdampfkonzentration einen genau gegenteiligen Effekt auf F_{LW}^{+}, F_{LW}^{-} und F_{LW} zur Folge hat wie die 20%-ige Abnahme. Bei näherem Hinschauen (i. e. unter Einbeziehung von Tabelle 3.7) erkennt man jedoch, dass die Sensitivität von F_{LW}^{+}, F_{LW}^{-} und F_{LW} hinsichtlich der 20%-igen Zunahme des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses etwas geringer ausfällt. Konkret ist einerseits der Betrag des +20%-H_2O-Bodenwerts von $\Delta F_{\mathrm{LW}}^{-}$ um 8.7% und andererseits der Betrag des +20%-H_2O-Werts von ΔF_{LW} am 50-km-Level um 11.3%

Tabelle 3.7: Kenndaten zu den Höhenprofilen der absoluten und relativen Flussdifferenzen aus Abbildung 3.13.

MLS	$\Delta F_{\mathrm{LW}}^{-}(0\ \mathrm{km})$	$(\Delta F_{\mathrm{LW}}^{-})_{\mathrm{rel}}(0\ \mathrm{km})$	$\Delta F_{\mathrm{LW}}(50\ \mathrm{km})$	$(\Delta F_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}(50\ \mathrm{km})$
-20% H_2O	-12.8 Wm^{-2}	-3.7%	4.3 Wm^{-2}	1.5%
+20% H_2O	11.7 Wm^{-2}	3.4%	-3.8 Wm^{-2}	-1.4%

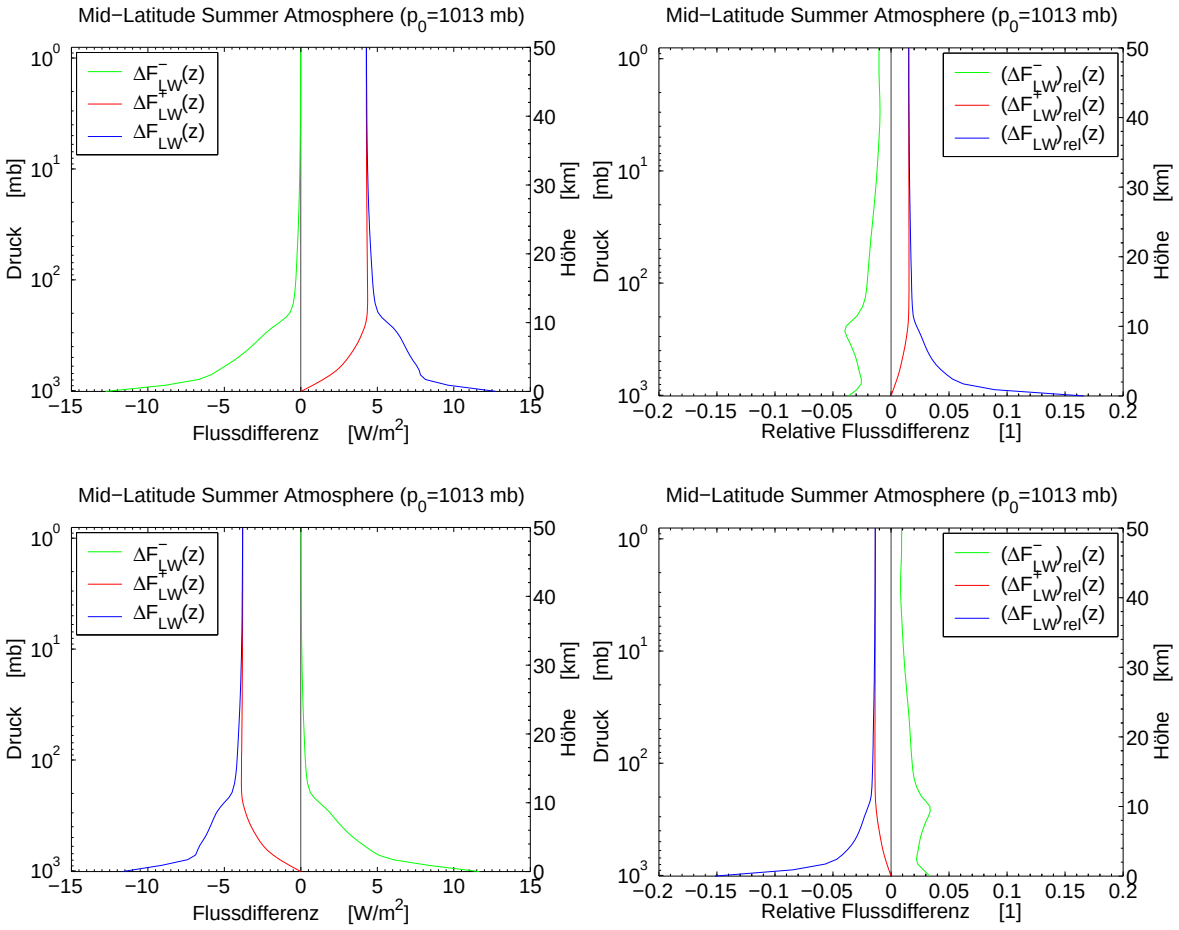


Abbildung 3.13: Höhenprofile der absoluten und relativen Flussdifferenzen bei einer 20%-igen Abnahme (oben) beziehungsweise einer 20%-igen Zunahme (unten) des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses.

kleiner als der Betrag des jeweils entsprechenden -20%-H_2O-Werts. Grundsätzlich nachvollziehbar wird diese Feststellung, wenn man sich die Definition der optischen Tiefe sowie der monochromatischen Transmissionsfunktion noch einmal vergegenwärtigt. Wie aus (2.50) hervorgeht, führt eine 20%-ige Zu-/Abnahme der Wasserdampfkonzentration zu einer gleichfalls 20%-igen Zu-/Abnahme der optischen Tiefe. Zufolge von (2.60) bedeutet dies jedoch dann gleichzeitig, dass sich der Wert der monochromatischen Transmissionsfunktion bei einer 20%-igen Zunahme der Wasserdampfkonzentration in kleinerem Ausmaß verringert als er sich bei einer 20%-igen Abnahme erhöht.

Abbildung 3.14 schließlich enthält die Höhenprofile der absoluten und relativen Kühlratendifferenz, welche man für die MLS-Atmosphäre im Zuge einer 20%-igen Abnahme (siehe die zwei oberen Plots) beziehungsweise einer 20%-

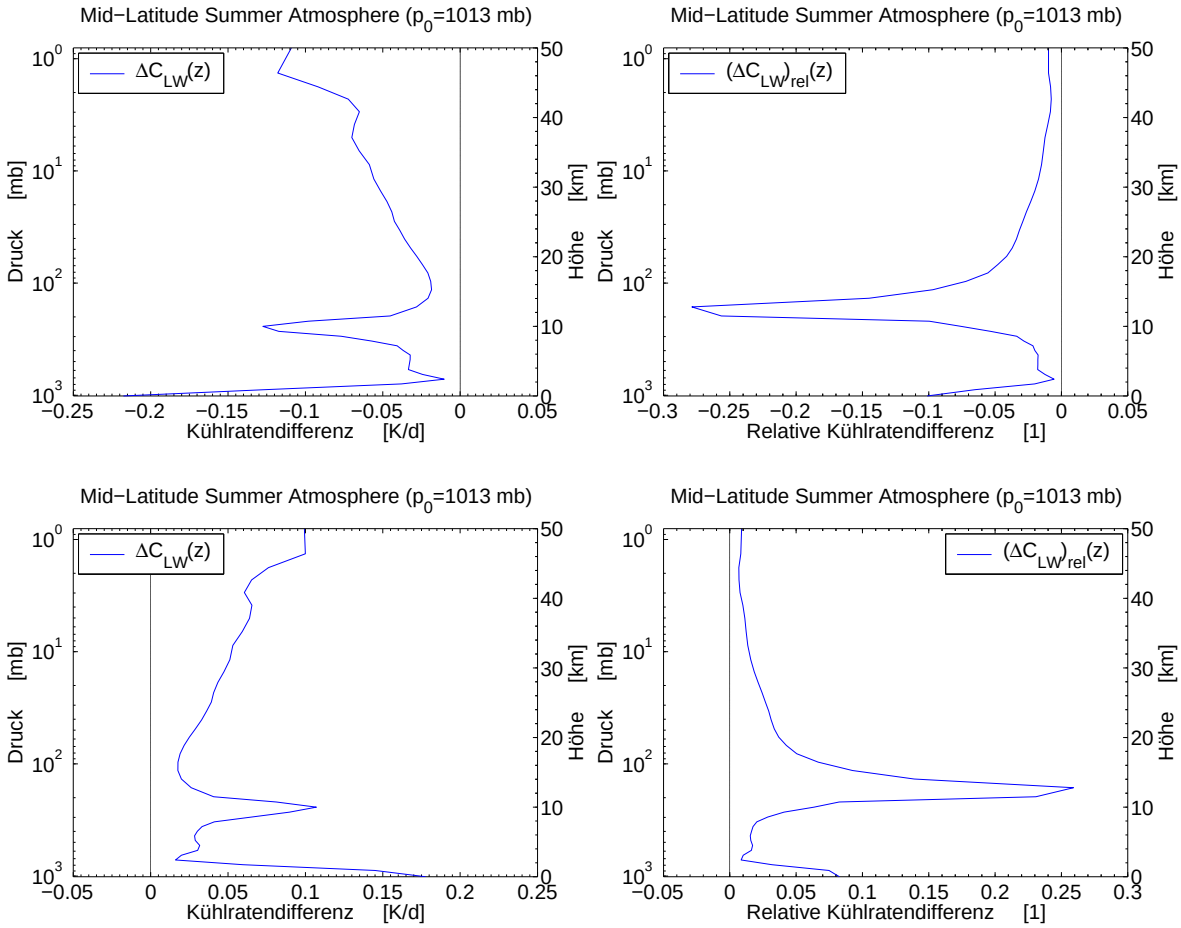


Abbildung 3.14: Höhenprofile der absoluten und relativen Kühlratendifferenz bei einer 20%-igen Abnahme (oben) beziehungsweise einer 20%-igen Zunahme (unten) des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses.

igen Zunahme (siehe die zwei unteren Plots) des H_2O-Volumenmischungsverhältnisses erhält. Die Verringerung der Wasserdampfkonzentration um 20% geht erwartungsgemäß im gesamten dargestellten Höhenbereich mit einer Abschwächung der Kühlrate einher. Genauso, wie es bei vollständiger Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs der Fall ist, bildet sich außerdem im Bereich der Tropopause eine ausgeprägte Minimumstruktur im Höhenprofil der relativen C_{LW}-Differenz aus. Wie aus Tabelle 3.8 ersichtlich wird, hat der Betrag des $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}$-Minimums indessen einen Wert deutlich kleiner als 100%, weswegen die 20%-ige Abnahme der Wasserdampfkonzentration keine radiative Erwärmung an der Tropopause mit sich bringt. Auffällig ist weiters, dass der Bodenwert des Betrags von $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel}}$ verhältnismäßig groß ist. Damit geht einher, dass das Minimum der absoluten C_{LW}-Differenz am Erdboden vorzufinden ist, und nicht, wie es gemäß

Tabelle 3.8: Kenndaten zu den Höhenprofilen der absoluten und relativen Kühlratendifferenz aus Abbildung 3.14. $\Delta C_{\mathrm{LW,ext}}$ steht für das Extremum der absoluten Kühlratendifferenz und $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel,ext}}$ für das Extremum der relativen Kühlratendifferenz im Höhenbereich zwischen 0 und 50 km.

MLS	$\Delta C_{\mathrm{LW,ext}}$	$(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel,ext}}$
-20% H_2O	-0.22 K/d $\rightarrow$ 1013.0 mb (0.0 km)	-27.9% $\rightarrow$ 162.9 mb (12.8 km)
+20% H_2O	0.18 K/d $\rightarrow$ 1013.0 mb (0.0 km)	25.9% $\rightarrow$ 162.9 mb (12.8 km)

Abbildung 3.11 bei verschwindendem H_2O-Volumenmischungsverhältnis der Fall ist, in der Troposphäre.

Was letztendlich noch bleibt, ist auf den Impakt einzugehen, den die Erhöhung der Wasserdampfkonzentration um 20% auf die Kühlrate zur Folge hat. Vergleicht man zu diesem Zweck in Abbildung 3.14 die beiden unteren Plots mit den beiden oberen Plots, stellt man unter Einbeziehung von Tabelle 3.8 fest, dass auch in Bezug auf die Kühlrate die Änderung im +20%-H_2O-Fall etwas schwächer ausfällt als im -20%-H_2O-Fall. Konkret ist einerseits der +20%-H_2O-Wert von $\Delta C_{\mathrm{LW,ext}}$ um 18.3% und andererseits der +20%-H_2O-Wert von $(\Delta C_{\mathrm{LW}})_{\mathrm{rel,ext}}$ um 7.0% kleiner als der Betrag des jeweils entsprechenden -20%-H_2O-Werts.

Zusammenfassung

Die drei Kapitel des vorangehenden Texts hatten zum Ziel, einen wesentlichen Aspekt des Energiehaushalts der Atmosphäre, nämlich die Abhängigkeit des Langwellenstrahlungstransfers vom atmosphärischen Wasserdampfgehalt herauszuarbeiten. Dieser Sachverhalt steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem als Terminus sehr geläufigen atmosphärenphysikalischen Phänomen des Treibhauseffekts, welches von grundlegender Relevanz für die Ausprägung des Erdklimas ist.

Um die Sensitivität des Langwellenstrahlungstransfers zu Änderungen der Wasserdampfkonzentration studieren zu können, benötigt man ein entsprechendes Programm, das Grundgrößen des Langwellenstrahlungstransfers wie Radianz, Strahlungsflussdichte und radiative Temperaturänderungsrate berechnet. Ich verwendete zu diesem Zweck Version 3.0 des von "Atmospheric and Environmental Research" (AER) entwickelten Programms "Rapid Radiative Transfer Model" (RRTM). RRTM basiert auf der Methode der korrelierten k-Verteilung (CKD-Methode). Diese wurde in Kapitel 2 im Anschluss an eine theoretische Betrachtung der Grundlagen des Langwellenstrahlungstransfers einer genaueren Analyse unterzogen. Dabei wurde gezeigt, dass die Berechnung der spektralen Transmissionsfunktion wesentlich vereinfacht werden kann, indem man die mühselige Integration im Wellenzahlraum durch die Integration im Raum der kumulativen Wahrscheinlichkeitsfunktion ersetzt. Wichtig ist festzuhalten, dass diese Vorgangsweise jedoch nur im Falle eines homogenen spezifischen Absorptionskoeffizienten als exakt angesehen werden darf. Betrachtet man Langwellenstrahlungstransfer in einer inhomogenen Atmosphärenschicht, erhält man abgesehen von den Grenzfällen der schwachen und starken Absorption nur Näherungslösungen für die spektrale Transmissionsfunktion. Die Güte dieser Näherungslösungen ist umso größer, je ähnlicher das Mapping vom Wellenzahlraum in den Raum des spezifischen Absorptionskoeffizienten für benachbarte dünne (und damit homogene) Atmosphärenschichten vonstatten geht, i. e. umso mehr die entsprechenden Verteilungen des spezifischen Absorptionskoeffizienten korrelieren. Was die reale Atmosphäre anbelangt, ist Korrelation, wie exemplarisch illustriert wurde, durchwegs in überraschend hohem Maße gegeben. Dementsprechend eignet sich die

Methode der korrelierten *k*-Verteilung sehr gut als Basis von Langwellenstrahlungsschemen, welche ob ihres im Vergleich zu exakten Line-by-Line-Modellen geringen Rechenaufwands zur Implementierung in Wetter- oder Klimamodellen herangezogen werden können.

Die Präsentation konkreter Ergebnisse hinsichtlich der Sensitivität des Langwellenstrahlungstransfers zu Änderungen der Wasserdampfkonzentration erfolgte schließlich in Kapitel 3. Anhand von vier Standardatmosphären, nämlich der TRO-Atmosphäre ("Tropical Atmosphere"), der MLS-Atmosphäre ("Mid-Latitude Summer Atmosphere"), der MLW-Atmosphäre ("Mid-Latitude Winter Atmosphere") und der SAW-Atmosphäre ("Subarctic Winter Atmosphere"), wurde diskutiert, in welcher Weise sich ein Nullsetzen, eine 20%-ige Abnahme sowie eine 20%-ige Zunahme des atmosphärischen Wasserdampfgehalts in den von RRTM berechneten Höhenprofilen von Einstrahlung, Ausstrahlung, Strahlungsflussdichte und Kühlrate niederschlagen.

Die vollständige Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs bringt für jede der vier Standardatmosphären eine drastische Abschwächung des Treibhauseffekts mit sich. Erwartungsgemäß ist die prozentuelle Abnahme des als Indikator für die Stärke des Treibhauseffekts aufzufassenden Bodenwerts der Einstrahlung am größten in der TRO-Atmosphäre, zumal diese wesentlich mehr Wasserdampf enthält als die drei übrigen Standardatmosphären. Im unteren und mittleren Bereich der Troposphäre verringert sich die Einstrahlung durchwegs ähnlich stark wie am Erdboden. Demgegenüber steht eine beträchtlich geringere prozentuelle Abnahme der Einstrahlung in der Stratosphäre. Diese Beobachtung ergibt sich aus der Tatsache, dass das atmosphärische Wasserdampfvorkommen fast zur Gänze auf die untere und mittlere Troposphäre beschränkt ist und der Einfluss des atmosphärischen Wasserdampfs auf den Treibhauseffekt folglich ab der oberen Troposphäre relativ rasch zugunsten von Kohlendioxid kleiner wird.

Auf die radiative Abkühlung wirkt sich die vollständige Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs ähnlich massiv aus wie auf den Treibhauseffekt. Festzustellen ist eine starke prozentuelle Abnahme der ziemlich großen Kühlraten, welche in den Originalstandardatmosphären im Bereich der unteren und mittleren Troposphäre auftreten. In der oberen Troposphäre verringert sich die Kühlrate für jede der vier Standardatmosphären schließlich sogar um mehr als 100%. Dies hat zur Folge, dass nach Nullsetzen des atmosphärischen Wasserdampfgehalts in allen vier Standardatmosphären radiative Erwärmung an der Tropopause beobachtet werden kann. In der Stratosphäre ist der Impakt fehlenden Wasserdampfs auf das Höhenprofil der Kühlrate um einiges geringer als in der Troposphäre. Darin spiegelt sich wiederum die Tatsache wider, dass die Wasserdampfkonzentration in der Stratosphäre im Vergleich zur Kohlendioxidkonzentration rasch sehr klein wird.

Die Abnahme der Wasserdampfkonzentration um 20% bringt natürlich genauso wie die vollständige Entfernung des atmosphärischen Wasserdampfs eine Ab-

schwächung des Treibhauseffekts und eine Verringerung der radiativen Abkühlung mit sich, wenn auch in wesentlich kleinerem Ausmaß. Die 20%-ige Zunahme der Wasserdampfkonzentration schließlich hat auf den ersten Blick einen genau konträren Effekt auf den Treibhauseffekt und die radiative Abkühlung wie die 20%-ige Abnahme. Bei genauerem Hinsehen stellt man indessen fest, dass die Änderung von Einstrahlung, Ausstrahlung, Strahlungsflussdichte und Kühlrate im +20%-H_2O-Fall etwas schwächer ausfällt als im -20%-H_2O-Fall. Prinzipiell verständlich wird dies eingedenk der spezifischen Abhängigkeit der monochromatischen Transmissionsfunktion von der optischen Tiefe.

Anhang A

Physikalische Konstanten

Quelle: http://www.physics.nist.gov/constants

$k = 1.380\ 6505(24) \times 10^{-23}$ JK^{-1}	(Boltzmann-Konstante)
$\sigma = 5.670\ 400(40) \times 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}	(Stefan-Boltzmann-Konstante)
$h = 6.626\ 0693(11) \times 10^{-34}$ Js	(Planck'sche Konstante)
$c_0 = 299\ 792\ 458$ ms^{-1}	(Vakuumlichtgeschwindigkeit)
$R^* = 8.314\ 472(15)$ Jmol^{-1}K^{-1}	(Universelle Gaskonstante)

Anhang B

Konzentrationsmaße am Beispiel von H_2O

Im Prinzip werden in der Literatur drei verschiedene Wasserdampfkonzentrationsmaße nebeneinander verwendet: Die spezifische Feuchte q_{H_2O}, das H_2O-Massenmischungsverhältnis r_{M,H_2O} und das H_2O-Volumenmischungsverhältnis r_{V,H_2O} (siehe zum Beispiel [16]). Die spezifische Feuchte ist per definitionem das Verhältnis der Wasserdampfmassendichte ρ_{H_2O} zur totalen Massendichte ρ und ergibt sich damit als

$$q_{H_2O} = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho}. \tag{B.1}$$

ρ_{H_2O} wird dabei oft auch als absolute Feuchte bezeichnet. Das H_2O-Massenmischungsverhältnis unterscheidet sich von der spezifischen Feuchte nur darin, dass es auf die Massendichte der trockenen Luft ρ_d bezogen ist. Unter Berücksichtigung von $\rho_d = \rho - \rho_{H_2O}$ gilt folglich:

$$r_{M,H_2O} = \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_d} = \frac{q_{H_2O}}{1 - q_{H_2O}}. \tag{B.2}$$

Der Unterschied zwischen ρ und ρ_d ist außer bei sehr hohen Wasserdampfkonzentrationen relativ klein. Dementsprechend gilt häufig in guter Näherung:

$$r_{M,H_2O} \cong q_{H_2O}. \tag{B.3}$$

Das Volumenmischungsverhältnis von Wasserdampf r_{V,H_2O} schließlich ist definiert als Verhältnis der partiellen H_2O-Volumendichte τ_{H_2O} zur partiellen Volumendichte der trockenen Luft τ_d:

$$r_{V,H_2O} = \frac{\tau_{H_2O}}{\tau_d}. \tag{B.4}$$

Will man nun die Verknüpfung zwischen $r_{V,\mathrm{H_2O}}$ und $r_{M,\mathrm{H_2O}}$ ableiten, benötigt man die –für jede Gaskomponente der Luft individuell gültige– Zustandsgleichung eines idealen Gases. Angewandt auf das Wasserdampfgas und die trockene Luft, kann diese in der Form

$$p\tau_{\mathrm{H_2O}} = \rho_{\mathrm{H_2O}} \left(\frac{R^*}{M_{\mathrm{H_2O}}} \right) T, \tag{B.5}$$

$$p\tau_d = \rho_d \left(\frac{R^*}{\overline{M}_d} \right) T \tag{B.6}$$

angeschrieben werden (siehe zum Beispiel [16]), wobei R^* für die universelle Gaskonstante, p für den totalen Druck, T für die Temperatur, $M_{\mathrm{H_2O}} \cong 18.02$ g/mol für das Molekulargewicht von Wasserdampf und $\overline{M}_d \cong 28.96$ g/mol für das mittlere Molekulargewicht der trockenen Luft stehen. Dividiert man (B.5) durch (B.6) ergibt sich unter Berücksichtigung von (B.2) letztendlich für das Volumenmischungsverhältnis von Wasserdampf:

$$r_{V,\mathrm{H_2O}} = \frac{r_{M,\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{H_2O}}/\overline{M}_d}. \tag{B.7}$$

Anhang C

Ableitung der Energiegleichung

Ausgehend von den Bilanzgleichungen für die innere, potenzielle, kinetische und latente Energie, gegeben durch das Gleichungssystem

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{F}_{\text{rad}} - L_E(\varepsilon-\gamma) - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{j}_W^D + \frac{1}{\rho}\mathbf{P}:\nabla\mathbf{v} - \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v}, \tag{C.1}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = g v_z, \tag{C.2}$$

$$\frac{dk}{dt} = -g v_z - \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot\nabla p + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}), \tag{C.3}$$

$$\frac{dl}{dt} = L_E(\varepsilon-\gamma) - \frac{1}{\rho}L_E\nabla\cdot\mathbf{j}_{\text{H}_2\text{O}}^D \tag{C.4}$$

(siehe zum Beispiel [10] und [11]), bekommt man die substanzielle zeitliche Änderung der spezifischen Gesamtenergie e als

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{d}{dt}(u+\phi+k+l) = \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{F}_{\text{rad}} - \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot\nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{j}_W^D - \frac{1}{\rho}L_E\nabla\cdot\mathbf{j}_{\text{H}_2\text{O}}^D + \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\mathbf{P}:\nabla\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{P}).\end{aligned} \tag{C.5}$$

Aus (C.5) folgt die Energiegleichung in der Form

$$\rho\frac{de}{dt} = -\nabla\cdot\mathbf{F}_{\text{rad}} - \nabla\cdot(p\mathbf{v}) - \nabla\cdot\mathbf{j}_W^D - L_E\nabla\cdot\mathbf{j}_{\text{H}_2\text{O}}^D + \nabla\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}). \tag{C.6}$$

Für die substanzielle Ableitung von e nach der Zeit gilt des Weiteren:

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e. \tag{C.7}$$

Anhand der auf der Massenerhaltung beruhenden Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \tag{C.8}$$

(siehe zum Beispiel [10] und [11]) kann (C.7) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} &= \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla e \; = \\ &= \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} - e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) - e \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \; = \\ &= \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) . \end{aligned} \tag{C.9}$$

Mit (C.6) resultiert für die Energiegleichung dann die Form

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} - \nabla \cdot (p \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{j}_W^D - L_E \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{H}_2\text{O}}^D + \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) . \tag{C.10}$$

Anhang D

Ableitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes

Die Radianz, die von einem beliebigen Oberflächenelement eines schwarzen Körpers emittiert wird, ist durch das Planck'sche Strahlungsgesetz gegeben, welches im Falle unpolarisierter Strahlung in der Form

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3 c^2}{\exp\left(\frac{hc\nu}{kT}\right) - 1} \tag{D.1}$$

angeschrieben werden kann (siehe zum Beispiel [13]). Die Integration von (D.1) über den Halbraum, in den die Strahlungsemission erfolgt, und über den gesamten Wellenzahlbereich liefert zunächst

$$\begin{aligned} F(T) &= \int_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(T)\, d\nu \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \;= \\ &= 2\pi h c^2 \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{hc\nu}{kT}\right) - 1}. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Führt man als neue Integrationsvariable $x = hc\nu/kT$ ein, wird (D.2) zu

$$F(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \tag{D.3}$$

Da $x \geq 0$ und damit $\exp(-x) \leq 1$ gilt, kann der Integrand in (D.3) mit Hilfe der Potenzreihe der Funktion $y = (1-y)^{-1}$ nun, wie folgt, umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{e^x - 1} &= \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \frac{x^3}{(e^x - 1)} = e^{-x} x^3 \frac{1}{1 - e^{-x}} = \\ &= e^{-x} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^3. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Durch Einsetzen von (D.4) in (D.3) bekommt man für $F(T)$ dann den Ausdruck

$$F(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} e^{-nx} x^3 dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_{y=0}^{\infty} e^{-y} y^3 dy, \tag{D.5}$$

wobei für x die Variable $y = nx$ substituiert wurde. Partielle Integration von (D.5) führt weiters zu

$$F(T) = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \cdot 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \tag{D.6}$$

Die unendliche Reihe in (D.6) konvergiert sehr rasch, so dass es sehr einfach ist, sie auf numerischem Weg zu berechnen. Ihr exakter Wert lässt sich jedoch auch analytisch bestimmen. Wie nämlich in der Funktionentheorie gezeigt werden kann, gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{D.7}$$

Mit dem Ergebnis von (D.7) erhält man schließlich aus (D.6) das Stefan-Boltzmann-Gesetz in der Form

$$F(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4. \tag{D.8}$$

$\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2$ steht dabei für die Stefan-Boltzmann-Konstante.

Anhang E

Lösung der Schwarzschild-Gleichung

Die Schwarzschild-Gleichung für eine plan-parallele Atmosphäre kann in der Form

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu,\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu,\mu) - B_\nu(T(\tau_\nu)) \tag{E.1}$$

angeschrieben sowie –bei separater Betrachtung von ausgestrahlter und eingestrahlter Radianz– durch

$$\mu \frac{dI_\nu^+(\tau_\nu,\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) - B_\nu(T(\tau_\nu)), \tag{E.2}$$

$$-\mu \frac{dI_\nu^-(\tau_\nu,-\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) - B_\nu(T(\tau_\nu)) \tag{E.3}$$

ausgedrückt werden (siehe zum Beispiel [7]). (E.2) und (E.3) repräsentieren jeweils eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das letztere Charakteristikum beruht auf der Tatsache, dass μ in einer plan-parallelen Atmosphäre nicht von der Höhe und ergo auch nicht von der optischen Tiefe abhängt. Setzt man in beiden Gleichungen den durch $B_\nu(T(\tau_\nu))$ verkörperten Emissionsterm gleich null, erhält man als homogene Lösung von (E.2) und (E.3)

$$I_{H_\nu}^+(\tau_\nu,\mu) = I_{H_\nu}^+(\tau_{0_\nu},\mu)\, e^{-(\tau_{0_\nu}-\tau_\nu)/\mu}, \tag{E.4}$$

$$I_{H_\nu}^-(\tau_\nu,-\mu) = I_{H_\nu}^-(0,-\mu)\, e^{-\tau_\nu/\mu}, \tag{E.5}$$

wobei τ_{0_ν} für die optische Tiefe der Atmosphäre steht. Dem Lösungsverfahren "Variation der Konstanten" zufolge setzt man nun mit Hilfe von (E.4) und (E.5) für die tatsächliche Lösung von (E.2) und (E.3) an:

$$I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) = f_\nu^+(\tau_\nu,\mu)\, e^{\tau_\nu/\mu}, \tag{E.6}$$

$$I_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) = f_\nu^-(\tau_\nu,-\mu)\, e^{-\tau_\nu/\mu}. \tag{E.7}$$

Geht man mit (E.6) und (E.7) in (E.2) und (E.3) hinein, ergibt sich für die Funktionen $f_\nu^+(\tau_\nu,\mu)$ und $f_\nu^-(\tau_\nu,-\mu)$

$$\frac{df_\nu^+(\tau_\nu,\mu)}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{\mu}B_\nu(\tau_\nu)\,e^{-\tau_\nu/\mu}, \tag{E.8}$$

$$\frac{df_\nu^-(\tau_\nu,-\mu)}{d\tau_\nu} = \frac{1}{\mu}B_\nu(\tau_\nu)\,e^{\tau_\nu/\mu} \tag{E.9}$$

und weiter

$$f_\nu^+(\tau_\nu,\mu) = f_\nu^+(\tau_{0_\nu},\mu) + \int\limits_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} \frac{1}{\mu}B_\nu\left(\tau'_\nu\right)e^{-\tau'_\nu/\mu}d\tau'_\nu, \tag{E.10}$$

$$f_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) = f_\nu^-(0,-\mu) + \int\limits_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} \frac{1}{\mu}B_\nu\left(\tau'_\nu\right)e^{\tau'_\nu/\mu}d\tau'_\nu. \tag{E.11}$$

Durch Einsetzen von (E.10) und (E.11) in (E.6) und (E.7) und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass

$$f_\nu^+(\tau_{0_\nu},\mu) = I_\nu^+(\tau_{0_\nu},\mu)\,e^{-\tau_{0_\nu}/\mu}, \tag{E.12}$$

$$f_\nu^-(0,-\mu) = I_\nu^-(0,-\mu) \tag{E.13}$$

geschrieben werden kann, bekommt man schließlich die integrierte Schwarzschild-Gleichung für eine plan-parallele Atmosphäre in der Form

$$I_\nu^+(\tau_\nu,\mu) = I_\nu^+(\tau_{0_\nu},\mu)\,e^{-\left(\tau_{0_\nu}-\tau_\nu\right)/\mu} + \int\limits_{\tau'_\nu=\tau_\nu}^{\tau_{0_\nu}} \frac{1}{\mu}B_\nu\left(\tau'_\nu\right)e^{-(\tau'_\nu-\tau_\nu)/\mu}d\tau'_\nu, \tag{E.14}$$

$$I_\nu^-(\tau_\nu,-\mu) = I_\nu^-(0,-\mu)\,e^{-\tau_\nu/\mu} + \int\limits_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu} \frac{1}{\mu}B_\nu\left(\tau'_\nu\right)e^{-(\tau_\nu-\tau'_\nu)/\mu}d\tau'_\nu. \tag{E.15}$$

Literaturverzeichnis

[1] Chou, M.D. and A. Arking: Computation of infrared cooling rates in the water vapor bands, Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 37, 855-867, 1980

[2] Clough, S.A. et al.: Line-by-Line Calculations of Atmospheric Fluxes and Cooling Rates: Application to Water Vapor, Journal of Geophysical Research, Volume 97, No. D14, 15 761-15 785, 1992

[3] Fu, Q. and K.N. Liou: On the Correlated *k*-Distribution Method for Radiative Transfer in Nonhomogeneous Atmospheres, Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 49, No. 22, 2139-2156, 1992

[4] Dieminger, W., G.K. Hartmann and R. Leitinger (Eds.): The Upper Atmosphere (Data Analysis and Interpretation), Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1996

[5] Leitinger, R.: Anmerkungen zur Struktur der Atmosphäre, Handout, vorgesehen als Lehrbehelf für die im Wintersemester 2002 von R. Leitinger an der Karl-Franzens-Universität Graz gehaltene Vorlesung “Physik der hohen Atmosphäre I (Grundlagen der Atmosphärenphysik)”, 2002

[6] Leitinger, R.: Anmerkungen zur Gaskinetik, Handout, vorgesehen als Lehrbehelf für die im Wintersemester 2002 von R. Leitinger an der Karl-Franzens-Universität Graz gehaltene Vorlesung “Physik der hohen Atmosphäre I (Grundlagen der Atmosphärenphysik)”, 2001

[7] Liou, K.N.: An Introduction to Atmospheric Radiation (Second Edition), International Geophysics Series, Volume 84, Academic Press (Elsevier Science (USA)), 2002

[8] Liou, K.N.: Radiation and Cloud Processes in the Atmosphere (Theory, Observation and Modeling), Oxford Monographs on Geology and Geophysics, No. 20, Oxford University Press, 1992

[9] Mlawer E.J. et al.: Radiative transfer for inhomogeneous atmospheres: RRTM, a validated correlated-*k* model for the longwave, Journal of Geophysical Research, Volume 102, No. D14, 16 663-16 682, 1997

[10] Peixoto, J.P. and A.H. Oort: Physics of Climate, Springer-Verlag New York, 1992

[11] Pichler, H.: Dynamik der Atmosphäre, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin-Oxford, 1997

[12] Prölss, G.W.: Physik des erdnahen Weltraums (Eine Einführung), Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 2001

[13] Reif, F.: Statistische Physik und Theorie der Wärme (Bearbeitung der deutschsprachigen Ausgabe durch W. Muschik), Verlag Walter de Gruyter & Co. Berlin-New York, 1987

[14] Rothman, L.S. et al.: The HITRAN molecular spectroscopic database: edition of 2000 including updates through 2001, HITRAN Special Issue (http://www.hitran.com), Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, Volume 82, No. 1-4, 2003

[15] Räisänen, P.: The effect of vertical resolution on clear-sky radiation calculations: tests with two schemes, Tellus, 1996

[16] Salby, M.L.: Fundamentals of Atmospheric Physics, International Geophysics Series, Volume 61, Academic Press, 1996